

Appunti di meccanica dei continui

Beppo Sax

24 febbraio 2002

Indice

1	Spostamento	1
2	Moto	3
3	Teoremi utili	4
3.1	Derivata sostanziale	4
3.2	Teorema della divergenza	4
3.3	Teorema del trasporto o di Reynolds	5
4	Equazioni del bilancio	5
4.1	Bilancio di massa	7
4.2	Bilancio di quantità di moto	8
4.3	Bilancio del momento della quantità di moto	9
4.4	Bilanci dell'energia e dell'entropia	10
5	Termodinamica della deformazione	10
5.1	Bilancio dell'energia	13
5.2	Bilancio dell'entropia	14
5.3	Funzione di dissipazione	15
6	Equazioni costitutive	15
6.1	Materiali con risposta istantanea	16
6.2	Materiali con memoria	16
6.3	Materiali con variabili interne	17
7	Termodinamica della plasticità	18

1 Spostamento

Il concetto di *corpo continuo* va considerato primitivo; ad ogni punto del continuo associamo determinate proprietà, che ne descriveranno il comportamento; per il momento le uniche proprietà che interessano sono le coordinate rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

Il corpo B occupa in ogni istante una certa regione \mathcal{R} dello spazio; interessa mettere in evidenza la porzione di spazio da esso occupato in un istante privilegiato, che si può benissimo assumere come origine dei tempi; tale regione viene detta *configurazione di riferimento*. I punti di B possono allora venire contrassegnati identificandoli con le loro posizioni nella configurazione di riferimento; così il punto \mathbf{X} è quello che nella posizione di riferimento occupava la posizione \mathbf{X} . L'uso della maiuscola ci ricorda che queste etichette identificano il punto materiale e non in generale la sua posizione istantanea, che è invece data dal vettore $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Il vettore \mathbf{X} è quella che si chiama la *coordinata materiale* o lagrangiana del punto; come si vede si identifica il punto con la sua coordinata materiale.

Deformazione del corpo B all'istante t è la funzione che associa ad ogni punto \mathbf{X} del sistema il punto $\mathbf{x}(\mathbf{X})$. Interessa anche il gradiente di tale funzione, o *gradiente di deformazione*, che è un tensore \mathbf{F} indicato, a seconda dei gusti, con le notazioni

$$\mathbf{F} = F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \nabla \mathbf{x} = x_{i,j}$$

Spostamento è il vettore $\mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}$.

Il gradiente di deformazione può essere decomposto in una dilatazione e una rotazione, in questo modo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$$

(i prodotti sono righe per colonne), in cui \mathbf{R} è il *tensore di rotazione* ed è un tensore ortonormale (ortogonale a determinante unitario), $\mathbf{U} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{1/2}$ è il *tensore di dilatazione destro* e $\mathbf{V} = (\mathbf{F} \mathbf{F}^T)^{1/2}$ è il *tensore di dilatazione sinistro*; questi ultimi sono tensori simmetrici definiti positivi. La decomposizione vale localmente per ogni punto del corpo.

Nell'intorno di ciascun punto cambiano le distanze, gli angoli, le aree e i volumi. In particolare, per quanto riguarda questi ultimi, si osserva che \mathbf{F} è la matrice jacobiana della trasformazione $\mathbf{x}(\mathbf{X})$, per cui

$$dv = J dV$$

essendo $J = |\det \mathbf{F}|$; di solito si considera $\det \mathbf{F} > 0$ per escludere deformazioni topologicamente equivalenti a delle riflessioni, che quindi non possano essere ottenute con continuità a partire dalla configurazione di riferimento. Tale limitazione non è strettamente necessaria, comunque sarà qui adottata.

Le deformazioni rigide sono caratterizzate da

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$$

cioè si riducono ad una pura rotazione.

Di solito interessa il caso di piccole deformazioni, quando \mathbf{F} si discosta poco da \mathbf{I} ; in questo caso, poiché $\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}$, si ha

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$$

e quindi $|\nabla \mathbf{u}| \ll 1$, per cui

$$\mathbf{U} \approx \mathbf{V} \approx \mathbf{I} + \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}$$

che definisce il *tensore di deformazione*

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2}$$

2 Moto

Il *moto* di B è una famiglia ad un parametro di deformazioni, il parametro essendo il tempo t . Un moto è definito da una funzione χ , assunta di classe C^3 , che manda $\mathcal{R} \times R$ in R^3 . La scrittura $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$, forse di forma un po' troppo complicata, denota che \mathbf{x} è la posizione assunta da \mathbf{X} al tempo t .

Dal punto di vista fisico la derivata $\dot{\chi}$ è una funzione biunivoca di \mathcal{R} nella configurazione attuale \mathcal{R}_t , e tale caratteristica deve essere riflessa dalla schematizzazione matematica. Di conseguenza esiste la funzione inversa $\dot{\chi}^{-1}$ e quindi il campo di velocità \mathbf{v} (e analogamente ogni campo definito su B) può essere rappresentato nelle due forme

$$\mathbf{v} = \dot{\chi}(\mathbf{X}, t)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\chi}(\dot{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \dot{\chi}(\mathbf{x}, t)$$

Nel primo caso si dice che la descrizione del campo è *materiale* o *lagrangiana*, nel secondo *spaziale* o *euleriana*.

Vale la pena introdurre il campo tensoriale $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$ in cui il gradiente si intende calcolato rispetto alle coordinate euleriane; tale campo si chiama *gradiente di velocità*. Conoscendo questo e la velocità in punto è possibile approssimare il campo di velocità nell'intorno del punto stesso.

Un legame tra \mathbf{L} e \mathbf{F} è dato dalla relazione

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F} \tag{1}$$

che si dimostra facilmente con la regola della derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{\partial \dot{\chi}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$$

(però occorre precisare cosa succede dell'ordine nel prodotto a secondo membro)

Come ogni tensore doppio, anche \mathbf{L} può essere scritto come somma della parte simmetrica \mathbf{D} e della parte antisimmetrica \mathbf{W} . Per conseguenza il campo di velocità nell'intorno di ogni punto viene scisso nella somma di un'aliquota rigida, che precisamente è una rotazione rigida, e di un'aliquota che è una dilatazione pura. Per questo \mathbf{D} è detta *tensore velocità di deformazione*.

3 Teoremi utili

3.1 Derivata sostanziale

Va ora determinata la relazione esistente tra le derivate di un campo nella descrizione lagrangiana e in quella euleriana. Diciamo Φ la rappresentazione lagrangiana e ϕ la rappresentazione euleriana di un certo campo. Deve quindi essere

$$\Phi(\mathbf{X}, t) \equiv \phi(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t) = \phi(\mathbf{x}, t)$$

Pertanto, eseguendo la derivata rispetto al tempo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{grad} \phi \cdot \mathbf{v}$$

in cui grad indica il gradiente nella descrizione euleriana, mentre in quella lagrangiana esso continua ad essere indicata con ∇ .

Di solito di indicano i due campi Φ e ϕ con la stessa lettera, diciamo ϕ , e ciò a ragione in quanto si tratta di due descrizioni matematiche della stesso campo. In questo caso però la derivata lagrangiana viene indicata col segno di derivata totale d/dt o addirittura con la speciale notazione D/Dt . Un'altra possibilità è di indicare col punto (alla Newton) la derivata lagrangiana e coll'apice (alla Lagrange...) la derivata euleriana, cosicché la relazione precedente si scrive

$$\dot{\phi} = \phi' + \text{grad} \phi \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

La derivata lagrangiana prende anche il nome di *derivata materiale* o *sostanziale*.

Vale la pena di insistere un poco sull'argomento, dando una interpretazione intuitiva della (2). Sia ϕ una qualsiasi proprietà di una particella di fluido, p.e. la temperatura. Essa varia per due ragioni: sia perché in un certo punto del campo viene a variare, per cui la particella, anche se ferma, parteciperà di questa variazione, sia perché la particella, trascinata dal suo moto, viene a capitare in un punto in cui la proprietà è diversa. A queste due aliquote corrispondono i due termini al secondo membro della (2).

3.2 Teorema della divergenza

Dell'importante teorema della divergenza ci accontentiamo di dare l'enunciato

$$\int_V \text{div} \mathbf{f} \, dV = \int_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

in cui \mathbf{f} è un campo vettoriale o tensoriale qualsiasi, V è un certo volume, ∂V è la superficie che delimita il medesimo e \mathbf{n} è la normale a tale superficie, intesa positiva se orientata verso l'esterno.

3.3 Teorema del trasporto o di Reynolds

Interessa spesso considerare l'integrale di una proprietà su un elemento finito di fluido, o in generale di continuo, essendo questo elemento definito da un insieme fisso di particelle, ciascuna trascinata dal proprio moto, che quindi occupano nello spazio diverse configurazioni al trascorrere del tempo. Il teorema di Reynolds ci dice come varia tale integrale al variare del tempo. In altre parole, il teorema si riferisce alla derivazione di integrali su domini dipendenti dal tempo, individuati da insiemi fissati di punti materiali.

Sia $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ un'arbitraria regione regolare limitata, e \mathcal{P}_t la sua immagine in \mathcal{R}_t . Il teorema di Reynolds afferma che, per ogni campo ϕ di classe C^1

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \phi \, dv = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\phi} + \phi \operatorname{div} \mathbf{v}) \, dv \quad (3)$$

Per la dimostrazione, si deriva rispetto al tempo l'identità abbastanza ovvia

$$\int_{\mathcal{P}_t} \phi \, dv = \int_{\mathcal{P}} \phi \, J \, dV;$$

la derivazione del secondo integrale è immediata in quanto il dominio il dominio \mathcal{P} è indipendente dal tempo. A questo punto occorre utilizzare la seguente identità (formula di Eulero),

$$\dot{J} = J \operatorname{tr} (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})$$

la cui dimostrazione, lunga e noiosa ma non difficile, si fonda sul fatto che la derivata, rispetto ad un parametro, di un determinante di ordine n è dato dalla somma di n determinanti, in ciascuno dei quali una differente riga o colonna del determinante di partenza viene sostituita dalla sua derivata rispetto al parametro. Eliminando la $\dot{\mathbf{F}}$ tramite la (1) e osservando che $\operatorname{tr} \mathbf{L} = \operatorname{div} \mathbf{v}$ si ottiene finalmente la (3).

4 Equazioni del bilancio

Le equazioni del bilancio non sono altro che le leggi fondamentali del moto adattate al continuo, invece che al caso del punto materiale o del corpo rigido, che è noto dalla Meccanica Razionale.

Prima di scrivere le equazioni del bilancio, occorre precisare un opportuno modello di continuo; tra i modelli possibili vi sono i *continui semplici* ossia ad un solo costituente e le cui particelle sono assimilabili a punti materiali (a tre gradi di libertà), i *continui polari* le cui particelle sono assimilate a corpuscoli rigidi (a sei gradi di libertà) o addirittura deformabili (a più gradi di libertà), le *mixture* di più continui semplici o polari.

Tale scelta non ha nulla a che fare con l'equazione di stato, ma definiscono in un qualche modo una 'classe' di continui all'interno della quale si vuole operare. per esempio, sia i metalli che i ceramici rientrano tra i continui semplici, ma gli uni sono in genere plastici o viscoplastici, gli altri fragili; quindi le equazioni del bilancio sono le stesse, mentre le equazioni costitutive sono diverse.

Qui saranno trattati solo i continui semplici.

Consideriamo corpi con massa distribuita con continuità. Ad ogni configurazione attuale \mathcal{R}_t è associato un campo di densità di massa ρ tale che la massa $m(\mathcal{P})$ di ogni regione $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ è

$$m(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho \, dv \quad (4)$$

nel seguito indicheremo con ρ_0 la densità di massa in \mathcal{R} , Analogamente si definiscono la quantità di moto $\mathbf{P}(\mathcal{P})$, il momento della quantità di moto (detto spesso momento angolare) $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{P})$, l'energia cinetica $K(\mathcal{P})$ e l'energia interna $E(\mathcal{P})$ (questa però deve essere intesa come la somma di tutte le energie eccetto quella cinetica, quindi in particolare comprende anche l'energia potenziale gravitazionale), imponendo che l'integrando sia rispettivamente $\rho \mathbf{v}$, $\rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{v}$, $\rho v^2/2$ e ρv rispettivamente.

Possiamo ora formulare le leggi di bilancio:

1. la massa di una parte qualsiasi del corpo è costante durante il moto, ossia:

$$\dot{m}(\mathcal{P}) = 0 \quad (5)$$

2. la derivata temporale della quantità di moto di una parte qualsiasi del corpo è uguale alla forza risultante agente su di essa:

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathcal{P}) = \mathbf{f}(\mathcal{P}) \quad (6)$$

3. la derivata temporale del momento della quantità di moto di una parte qualsiasi del corpo è uguale al momento risultante delle forze agenti su di essa:

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}(\mathcal{P}) = \mathbf{m}(\mathcal{P}) \quad (7)$$

4. la derivata temporale dell'energia totale (cinetica + interna) di una parte qualsiasi del corpo è uguale alla somma tra la potenza complessiva delle forze $W(\mathcal{P})$ e l'energia fornita, per unità di tempo, da sorgenti esterne Q , ossia

$$\dot{K}(\mathcal{P}) + \dot{E}(\mathcal{P}) = W(\mathcal{P}) + Q(\mathcal{P}) \quad (8)$$

in cui resta da precisare la struttura di \mathbf{f} , \mathbf{m} , W , Q .

Si assume che la forza \mathbf{f} si componga di *forze di volume* dovute all'azione 'a distanza' di altri corpi (p.e. forze gravitazionali, elettriche e magnetiche) e di *forze di superficie*, proporzionali all'area, trasmesse attraverso il contatto con la parte rimanente del corpo. Si scrive quindi

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) = \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \, da + \int_{\mathcal{P}_t} \rho \mathbf{b} \, dv \quad (9)$$

in cui $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ è la densità di forza di superficie agente sull'elemento con normale esterna \mathbf{n} e $\rho \mathbf{b}$ è la densità di forza di volume. La necessità di esplicitare

la dipendenza dalla densità, oltre ad essere abbastanza ‘naturale’ (si pensi ad esempio al caso delle forze gravitazionali) facilita l’applicazione del teorema del trasporto di Reynolds, come si vedrà a proposito del bilancio di massa.

Espressioni analoghe alla (9) valgono per \mathbf{m} , W , Q , cioè:

$$\mathbf{m}(\mathcal{P}) = \int_{\partial\mathcal{P}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{t}(\mathbf{n}) \, da + \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{b} \, dv$$

$$W(\mathcal{P}) = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \, da + \int_{\mathcal{P}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv$$

$$Q(\mathcal{P}) = - \int_{\partial\mathcal{P}_t} q(\mathbf{n}) \, da + \int_{\mathcal{P}_t} \rho r \, dv$$

q è il flusso di calore e ρr la sorgente termica di volume. Il segno $-$ davanti all’integrale di superficie per q è stato messo per fare in modo che si abbia un aumento di energia in \mathcal{P} allorché il flusso è entrante ($q(\mathbf{n}) > 0$)

4.1 Bilancio di massa

La (5), introducendo la definizione di $m(\mathcal{P})$ e il teorema del trasporto (3) si scrive

$$\int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \, dv = 0 \quad (10)$$

L’arbitrarietà della regione \mathcal{P}_t e l’assunta continuità dell’integrando forniscono

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

o, equivalentemente

$$\rho' + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Similmente si ottiene

$$\rho J = \rho_0$$

secondo cui, nota la costante $\rho_0 = \rho(t = 0)$, ρ è individuata da J e viceversa. Queste ultime tre espressioni rappresentano forme diverse dell’equazione (locale) di bilancio della massa.

Si fa presente che un’equazione in forma locale viene anche chiamata, tradizionalmente *equazione indefinita*.

Utilizzando la (10) si perviene ad una forma molto semplice della legge del trasporto. Infatti, sostituendo nella (3) ϕ con $\rho\psi$ si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho\psi \, dv = \int_{\mathcal{P}_t} (\psi \dot{\rho} + \rho \dot{\psi} + \rho\psi \operatorname{div} \mathbf{v}) \, dv = \int_{\mathcal{P}_t} \rho \dot{\psi} \, dv \quad (11)$$

cioè la derivata sostanziale di una quantità estensiva viene effettuata derivando solo la corrispondente quantità specifica e considerando la densità come costante.

4.2 Bilancio di quantità di moto

Esaminiamo ora le conseguenze della legge del bilancio della quantità di moto, che per i corpi rigidi esprime essenzialmente la condizione di equilibrio alla traslazione. Questa legge di bilancio è decisamente più complessa di quella del bilancio di massa.

Osserviamo preliminarmente che, per effetto della (11) dalla legge di bilancio (6) si ottiene:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b}) = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{n}) da;$$

i campi ρ , \mathbf{b} e $\dot{\mathbf{v}}$ essendo considerati limitati in \mathcal{R}_t .

Deduciamo innanzitutto il *teorema di Cauchy* che costituisce un risultato fondamentale della meccanica dei continui, in quanto fornisce l'esistenza del tensore degli sforzi per la descrizione degli sforzi di superficie.

Il teorema di Cauchy afferma che condizione necessaria perché la (6) sia soddisfatta è che esista un campo tensoriale $\boldsymbol{\sigma}$, detto *tensore degli sforzi*, tale che

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (12)$$

(tale prodotto si intende come prodotto scalare, o righe per colonne).

La dimostrazione del teorema parte dal provare preliminarmente che se $\{\mathbf{e}_i\}$ è una base ortonormale, in ogni punto di \mathcal{R}_t e per ogni versore \mathbf{k} con $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, si ha

$$\mathbf{t}(\mathbf{k}) = - \sum_i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{t}(-\mathbf{e}_i), \quad (13)$$

che insomma per l'equilibrio basta tener conto solo delle forze di superficie, cosa non difficile da dimostrare pensando che il volume del tetraedro elementare con gli spigoli paralleli ai versori $\{\mathbf{e}_i\}$ e la quarta faccia normale a \mathbf{k} è un infinitesimo di ordine superiore all'area delle facce.

Dalla (13) si ottiene

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{n}) \quad (15)$$

(basta in essa sostituire al posto di \mathbf{k} una volta \mathbf{n} e una volta $-\mathbf{n}$) che costituisce la legge di azione e reazione per un continuo.

Infine notiamo che, in virtù della (15), per ogni versore \mathbf{n} la (13) permette di scrivere

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n}$$

con $\mathbf{T} = \sum_i \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_i$.

Tenuto conto della (12), l'applicazione del teorema della divergenza e l'arbitrarietà di \mathcal{P}_t forniscono l'equazione del bilancio della quantità di moto nella forma

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (16)$$

essendo

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \sigma_{ij,i}$$

La (16) nel caso statico (in cui il primo membro è nullo) restituisce le equazioni indefinite dell'equilibrio:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0$$

Il confronto tra la (16) e l'equazione del moto $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}$ per un punto materiale o, in forma opportuna, per un corpo rigido, rivela come la deformabilità del continuo dia origine ad un contributo addizionale alla forza, $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$, tramite il tensore degli sforzi.

Questa considerazione apre la strada alla deduzione di quella che è chiamata, con un po' di ambiguità l'*equazione dell'energia meccanica*.

Moltiplicando entrambi i membri delle (16) per \mathbf{v} e integrando sul volume \mathcal{P}_t , sfruttando l'identità vettoriale

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}^T : \operatorname{grad} \mathbf{v}$$

e tenendo presente la simmetria del tensore $\boldsymbol{\sigma}$, si ha

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathcal{P}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{P}_t} \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \, dv - \int_{\mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{v} \, dv \quad (17)$$

in cui il penultimo termine può essere trasformato in integrale di superficie tramite il teorema della divergenza.

Questa espressione può essere interpretata come il principio delle potenze virtuali, o dei tassi di lavoro virtuale, utilizzando il moto reale come caso particolare di moto virtuale. A parole, la potenza delle forze d'inerzia eguaglia la somma delle potenze delle forze di massa, delle forze di superficie e delle forze interne.

A tale proposito si nota che le forze interne sono rappresentate dal tensore degli sforzi *cambiato di segno*.

L'ultimo termine della (17) può anche essere interpretato come l'aliquota della potenza delle forze esterne che non si converte in energia cinetica, e quindi rimane immagazzinata come energia interna. Tale interpretazione va però corretta per tener conto degli scambi termici.

4.3 Bilancio del momento della quantità di moto

L'analisi della legge di bilancio del momento angolare è immediata. Per il teorema della divergenza e per l'identità vettoriale $\mathbf{r} \wedge (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \wedge \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\tau}$ (da controllare i segni) si ha

$$\int_{\partial \mathcal{P}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{P}_t} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + 2\boldsymbol{\tau}] \, dv$$

essendo $\boldsymbol{\tau}$ il vettore assiale associato al tensore $\boldsymbol{\sigma}$, collegato alla sua parte emisimmetrica, ossia $\tau_h = \epsilon_{hpq} \sigma_{pq} / 2$. Pertanto, tenuto conto della (16) e dell'arbitrarietà di \mathcal{P}_t , dalla (7) si deduce che $\boldsymbol{\tau} = 0$, cioè che $\boldsymbol{\sigma}$ è simmetrico ossia che *la legge di bilancio del momento angolare implica la simmetria del tensore degli sforzi*.

4.4 Bilanci dell'energia e dell'entropia

Prima di procedere allo studio del bilancio dell'energia, e dell'altro importante bilancio, quello dell'entropia, è necessario dire qualcosa a proposito della termodinamica dei continui.

5 Termodinamica della deformazione

Il *primo principio della termodinamica* afferma che due stati qualunque di un sistema possono essere sempre interconnessi mediante un processo meccanico e che l'energia meccanica scambiata in tale processo dipende solo dagli stati che vengono interconnessi, insomma da quelli di partenza e di arrivo. Naturalmente occorre tener conto che il passaggio da uno stato all'altro può essere possibile, ma risultare impossibile il passaggio opposto.

La conseguenza è che per ogni stato di un sistema è definita una quantità detta energia, pari al lavoro meccanico scambiato nel processo. Passando da uno stato all'altro si ha in generale variazione di energia.

Il *secondo principio della termodinamica* può essere introdotto con la definizione di entropia, che però non è tanto agevole da tradurre in termini di facile comprensione; tra l'altro, ritengo, in accordo con le più recenti formulazioni della termodinamica postulativa, che la definizione di entropia debba prescindere del tutto dal concetto di calore, il quale deve esserne una conseguenza e non una premessa.

Riporto allora i due postulati di Callen che definiscono implicitamente sia l'entropia che il secondo principio della termodinamica, ma che sono validi solo per sistemi in equilibrio:

Postulato I: Esiste una funzione delle variabili estensive di ogni sistema composto, chiamata entropia S , che è definita in tutti gli stati di equilibrio e che gode della seguente proprietà: in assenza di vincoli interni, i valori delle variabili estensive sono tali da far raggiungere all'entropia il valore massimo, tra tutti quelli che essa può assumere nei vari stati di equilibrio nei quali il sistema è soggetto a vincoli.

Postulato II: L'entropia di un sistema composto è additiva rispetto ai sottosistemi che lo compongono, e inoltre è una funzione continua, derivabile e monotonamente crescente dell'energia.

Il secondo postulato afferma che la scala dell'entropia è determinato a meno di una trasformazione lineare; tenendo conto del terzo principio, l'entropia rimane determinata a meno di una costante moltiplicativa, che viene fissata assegnando l'entropia o la temperatura in uno stato arbitrario, per esempio fissando il punto triplo dell'acqua a 273.15 K.

Come conseguenza dei postulati esiste una *funzione fondamentale* della termodinamica, che dà l'entropia in funzione delle variabili di stato, conoscendo la quale è possibile risolvere qualsiasi problema termodinamico.

Volendo, risulta possibile introdurre l'entropia anche per stati di non equilibrio col seguente ragionamento:

Premessa: Ogni sistema in un certo stato può essere portato in uno stato di equilibrio, con assegnati valori del numero di moli e dei parametri esterni, attraverso un processo reversibile. Si intende che questo processo sia reversibile sia esternamente (sollevamento o abbassamento di un peso) sia internamente (mancanza di attriti); quindi può essere ripercorso al contrario riportando sia il sistema che l'ambiente nelle condizioni di partenza.

In tale stato di equilibrio è possibile calcolare l'entropia con metodi puramente termostatici, per esempio applicando i postulati di Callen. Allora basta dire che tutti gli stati connessi a questo attraverso un processo meccanico reversibile hanno la stessa entropia.

Le definizioni di energia e di entropia prescindono dal fatto che il sistema sia o non in equilibrio; però la temperatura può essere definita solo per sistemi in equilibrio o almeno molto prossimi all'equilibrio, per i quali soli esiste la funzione fondamentale; la trattazione termodinamica dei problemi della deformazione riposa sul *principio dello stato locale* per cui il singolo elementino è considerato molto vicino all'equilibrio, per cui per esso valgono le usuali formule della termostatica.

In definitiva, lo stato termodinamico viene definito dalle seguenti quantità:

1. le variabili cinematiche o parametri
2. la temperatura
3. eventuali variabili interne

eventualmente la temperatura può essere sostituita dall'energia o dall'entropia.

Una volta scelte le variabili indipendenti siamo dispensati dall'uso di pedici per indicare quali variabili sono tenute costanti quando si eseguono derivate parziali.

Chiariti i concetti di energia e di entropia, è possibile definire quelli di *calore* e *lavoro*.

Uno scambio energetico è detto lavoro se avviene senza *trasferimento* di entropia (questo però non significa che non ci siano *variazioni* di entropia, perché all'interno del sistema si possono verificare cause di irreversibilità, p.e. in presenza di attriti); è detto calore se la variazione di energia e quella di entropia sono connessi in modo che

$$dE = T dS \tag{18}$$

Comunque spesso il termine calore è adoperato per tutti gli scambi energetici che non siano lavoro.

La definizione di lavoro permette di distinguere tra le variabili di stato i *parametri*, che sono quelli tali che, se rimangono invariati non c'è scambio di lavoro con l'esterno.

Il lavoro può essere scritto

$$dL = A_{ij} da_{ij} \tag{19}$$

in cui a_{ij} sono i parametri e A_{ij} sono le forze generalizzate, la cui definizione è implicita nella relazione precedente.

Nella meccanica dei materiali più che di lavoro infinitesimo si parla di potenza meccanica, dividendo la (18) per dt , quindi

$$\dot{L} = A_{ij}\dot{a}_{ij}$$

L'aumento dell'entropia dovuta a flussi termici è un aumento reversibile, che si somma a quello dovuto a irreversibilità, per cui:

$$dS^{(r)} = \frac{dQ}{T}$$

Delle forze generalizzate A_{ij} una parte compie lavoro reversibile e una parte lavoro irreversibile; corrispondentemente possono essere definite forze conservative e forze dissipative.

Da

$$dL = dE - dQ = dE - T dS^{(r)} = dE - T dS + T dS^{(i)}$$

sostituendo nella (19)

$$A_{ik} da_{ik} = \left(\frac{\partial E}{\partial a_{ik}} - T \frac{\partial S}{\partial a_{ik}} \right) da_{ik} + T dS^{(i)}$$

in quanto

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T} - T \frac{\partial S}{\partial T} \right) = 0$$

per la definizione di T . Introducendo l'energia libera

$$A_{ik} da_{ik} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a_{ik}} \right) da_{ik} + T dS^{(i)}$$

e il primo addendo a secondo membro si può interpretare come il lavoro di forze conservativo e il secondo come lavoro di forze dissipative.

Se si desidera ragionare in termini di potenze si possono sostituire i differenziali con le corrispondenti derivate rispetto al tempo.

Si osserva che $T\dot{S}^{(i)}$ deve essere funzione sia delle variabili di stato sia delle loro derivate (per via della presenza di $\dot{S}^{(i)}$). Tale funzione prende il nome di *funzione di dissipazione*.

Rimane da dire qualcosa sulle variabili di stato che non siano parametri (o variabili esterne). Esse, a parte una, che può essere la temperatura, l'energia o l'entropia, sono dette *variabili interne*. Benché non strettamente necessarie per la descrizione di un continuo, sono tuttavia molto usate, come sarà spiegato.

Analogamente alle variabili esterne, si definiscono anche per le variabili interne delle opportune forze generalizzate (che potrebbero essere chiamate forze interne, con un significato un po' diverso da sopra). Anche per queste forze si possono assegnare una parte conservativa e una dissipativa; se α_{ij} è una variabile interna, la relativa forza conservativa è

$$\beta_{ij}^{(c)} = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{ij}}$$

e la dissipativa si può trovare come aliquota aggiuntiva alla potenza meccanica dissipata che quindi diventa

$$\dot{L}^{(d)} = A_{ij}^{(d)} a_{ij} + \beta_{ij}^{(d)} \alpha_{ij}$$

Una caratteristica delle forze interne è che il lavoro esterno per esse è nullo; quindi

$$\dot{L} = \dot{L}^{(r)} + \dot{L}^{(d)} = A_{ij}^{(r)} a_{ij} + A_{ij}^{(d)} a_{ij} + \beta_{ij}^{(c)} \alpha_{ij} + \beta_{ij}^{(d)} \alpha_{ij} = A_{ij}^{(r)} a_{ij} + A_{ij}^{(d)} a_{ij} = A_{ij} \dot{a}_{ij}$$

da cui

$$\beta_{ij}^{(c)} = -\beta_{ij}^{(d)}$$

5.1 Bilancio dell'energia

L'equazione di bilancio dell'energia si ottiene dicendo che la derivata temporale dell'energia totale (cinetica K + interna E) di una parte qualsiasi del corpo è uguale alla somma tra la potenza complessiva delle forze $W(\mathcal{P})$ e l'energia fornita, per unità di tempo, da sorgenti esterne Q , ossia

$$\dot{K}(\mathcal{P}) + \dot{E}(\mathcal{P}) = W(\mathcal{P}) + Q(\mathcal{P})$$

essendo

$$K(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho \frac{v^2}{2} dv$$

$$E(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho e dv$$

$$W(\mathcal{P}) = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} da + \int_{\mathcal{P}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv$$

$$Q(\mathcal{P}) = - \int_{\partial\mathcal{P}_t} q(\mathbf{n}) da + \int_{\mathcal{P}_t} \rho r dv$$

q è il flusso di calore e ρr la sorgente termica di volume. Questa tiene conto della generazione di energia da campi elettrici o magnetici e dell'apporto (o sottrazione) di energia per irraggiamento. Il segno $-$ davanti all'integrale di superficie per q è stato messo per fare in modo che si abbia un aumento di energia in \mathcal{P} allorché il flusso è entrante ($q(\mathbf{n}) > 0$).

Il lavoro nella formulazione tradizionale del primo principio della termodinamica è dato da $dL = -W dt$ in cui il segno meno deriva dalla decisione arbitraria di considerare positivo il lavoro se uscente dal sistema, se cioè rappresenta una diminuzione di energia del sistema.

Scritta l'equazione di bilancio in senso integrale, facciamo intervenire la (11) per scrivere diversamente il primo membro:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho \mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} dv + \int_{\mathcal{P}_t} \rho \dot{e} dv = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} da + \int_{\mathcal{P}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv - \int_{\partial\mathcal{P}_t} q(\mathbf{n}) da + \int_{\mathcal{P}_t} \rho r dv$$

poi facciamo entrare in campo l'equazione di bilancio della quantità di moto scritta nella forma (17), e, tenendo conto dell'arbitrarietà del dominio di integrazione, si ha

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (20)$$

ossia il primo principio della termodinamica per corpi deformabili, in cui, ripetiamo in cui e è l'energia interna per unità di massa, r è il calore generato, per unità di volume, per effetto p.e. di induzione elettrica, o per attrito interno, \mathbf{q} è il flusso termico. L'energia interna e non comprende le aliquote di energia potenziale e cinetica che sono state eliminate per il tramite dell'equazione dell'energia meccanica (17).

5.2 Bilancio dell'entropia

Il secondo principio della termodinamica porta alla relazione

$$\dot{S} \geq \dot{S}^{(r)} \quad (21)$$

in cui il primo membro è

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho s \, dv$$

essendo s l'entropia per unità di massa, mentre la derivata d/dt viene intesa come derivata sostanziale (o materiale) anche se trattandosi di solidi con piccole deformazioni la derivata euleriana coincide con quella lagrangiana. Trasformando tale derivata con la (11) e sostituendo il secondo membro della (21) si trova

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho \dot{s} \, dv \geq \int_{\mathcal{P}_t} \frac{r}{T} \, dv - \int_{\partial \mathcal{P}_t} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} \, da \quad (22)$$

Applicando il teorema di Gauss-Green (o della divergenza)¹ si ha

$$\int_{\mathcal{P}_t} \left(\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{r}{T} \right) dv \geq 0$$

Questa disuguaglianza è valida per ogni dominio V del corpo e implica che

$$\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0$$

Sostituendo in essa l'espressione del primo principio si ha

$$\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{1}{T} (\rho \dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \operatorname{div} \mathbf{q}) \geq 0$$

Notando che

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} = \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2}$$

¹ $\int_V \operatorname{div} \vec{F} \, dv = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \mathbf{n} \, da$

e moltiplicando per $T > 0$ si ottiene

$$\rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}T}{T} \geq 0$$

La disuguaglianza di Clausius-Duhem si ottiene introducendo l'energia libera $\psi = e - Ts$ e differenziando, per cui si ha:

$$T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} = - \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right)$$

e sostituendo

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}T}{T} \geq 0$$

La ψ dipende dalle variabili di stato osservabili ed interne:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\epsilon}, T; \boldsymbol{\epsilon}^e, \boldsymbol{\epsilon}^p, V_k)$$

essendo le V_k delle generiche variabili interne che ci riserviamo di precisare di volta in volta in base alla fisica del problema esaminato (in un caso interessante una di queste variabili sarà proprio il danno).

5.3 Funzione di dissipazione

La (21) può essere scritta

$$\dot{S}^{(i)} = \dot{S} - \dot{S}^{(r)} \geq 0$$

che, ripetendo il ragionamento del paragrafo precedente, porta a scrivere

$$T \rho \dot{s}^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}^{(d)} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\beta}^{(d)} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}T}{T} \geq 0 \quad (23)$$

e quindi ad introdurre la funzione

$$T \dot{s}^{(i)} = \phi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{q}, \dot{T}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\alpha}, T) \geq 0$$

che prende il nome di *funzione di dissipazione*. La presenza dei primi tre argomenti discende direttamente dalla (23), mentre i successivi si spiegano osservando che la ϕ , essendo un'aliquota di $T\dot{s}$, dipende dalle variabili di stato e dalle loro derivate materiali. Comunque, i primi tre argomenti sono quelli essenziali e sono gli unici che entrano in una discussione dei materiali più comuni (plastici, viscoplastici, viscoelastici).

6 Equazioni costitutive

In parallelo alla trattazione della termodinamica dei continui, vanno trattate le relative equazioni costitutive, che esprimono la dipendenza di $\boldsymbol{\sigma}$ e \mathbf{q} da ρ , \mathbf{v} e

e. Il caso più semplice è quello di gas perfetto in quiete; allora σ si riduce alla sola pressione (a parte il segno), non vi sono flussi di calore né campi di velocità e l'energia interna dipende dalla sola temperatura; per conseguenza si ottiene l'equazione di stato di Clapeyron. La conclusione di questo ragionamento elementare è che le equazioni costitutive sono l'esatto corrispettivo delle equazioni di stato.

Le equazioni costitutive sono essenzialmente dettate dall'esperimento; però vi sono alcuni principi generali che guidano nella scrittura delle equazioni; tra essi il *principio di obbiettività*, il *principio di dissipazione* (compatibilità con la termodinamica) e la *regola di equipresenza*. Su essi comunque si rimanda a testi specifici.

Qui ci tratteniamo solo sulle leggi costitutive per i continui semplici, che saranno distinti in tre gruppi: materiali con risposta istantanea, materiali con memoria e materiali con variabili interne.

6.1 Materiali con risposta istantanea

Tali materiali costituiscono i modelli più semplici per descrivere il comportamento dei continui: si assume che la risposta, in \mathbf{X} , all'istante t sia individuata da un opportuno insieme di grandezze, in \mathbf{X} , allo stesso istante. Sono anche detti corpi senza variabili interne. Un esempio è costituito dai *corpi elastici*, che sono materiali senza variabili interne né sforzi dissipativi; se invece mancano gli sforzi conservativi si ha il *corpo puramente viscoso*.

Tra i materiali con risposta istantanea è facile la distinzione tra solidi e fluidi, mentre per quelli con variabili interne la distinzione è più sfumata: un materiale senza variabili interne è fluido se è nulla la parte deviatorica del tensore degli sforzi conservativi, altrimenti è solido. Per conseguenza il corpo puramente viscoso viene classificato come fluido, anche contro la comune intuizione.

In un fluido è importante solo la dilatazione di volume ϵ_{kk} ; se essa è molto piccola si ha il *liquido*, se può assumere valori grandi a piacere si ha il *gas*. Una schematizzazione spesso usata è quella del liquido incompressibile, per il quale $\epsilon_{kk} = 0$.

Un fluido nel quale esiste la parte deviatorica degli sforzi (e non possono essere che sforzi dissipativi, per la definizione di fluido) è detto viscoso; altrimenti non viscoso o inviscido. Il fluido viscoso incompressibile è un esempio di corpo puramente viscoso.

6.2 Materiali con memoria

I materiali reali rivelano, in una certa misura, una deformazione variabile nel tempo sotto l'azione di uno sforzo costante e un decadimento dello sforzo in presenza di una deformazione costante. In certi materiali questi effetti sono molto pronunciati mentre in altri sono trascurabili e inoltre, per un particolare materiale, la loro entità dipende fortemente dalla temperatura. Questi materiali conservano in qualche modo memoria del loro stato passato, donde la necessità di una *teoria dei materiali con memoria*.

Un importante schema particolare di materiali con memoria è fornito dalla viscoelasticità lineare la cui formulazione è dovuta a Ludwig Boltzmann (1874). Una teoria generale dei materiali con memoria, basata sull'applicazione rigorosa delle restrizioni termodinamiche, è stata iniziata da Coleman nel 1964. L'unica limitazione significativa, peraltro realistica, consiste nell'ammettere che la memoria del materiale diventi sempre più debole quanto più lontana nel passato è la causa che si considera. Per questo tali continui vengono detti *materiali con memoria evanescente*.

6.3 Materiali con variabili interne

Nello schema dei materiali con variabili interne (B. D. Coleman, M. E. Gurtin, 1967) la risposta all'istante t è determinata da un opportuno insieme di variabili osservabili e di variabili interne, tutte considerate allo stesso istante t ; le variabili interne evolvono con una legge che assegna la derivata temporale mediante una funzione anch'essa dipendente dalle variabili osservabili e dalle variabili interne (regola di equipresenza). Le variabili interne forniscono un modello di memoria del materiale, e la loro introduzione è motivata da una difficoltà legata ai funzionali di memoria. Infatti la determinazione esplicita dei funzionali risulta abbastanza difficile, mentre le variabili interne consentono di ottenere modelli abbastanza complessi, utilizzando *funzioni* invece di *funzionali*, evitando così difficoltà tecniche e calcoli laboriosi.

È il caso adesso di fare un esempio di materiale con variabili interne, per capire meglio la potenza del metodo. L'esempio ci introdurrà anche nel mondo dei modelli reologici dei materiali, trasferendo in linguaggio termodinamico quelli che potrebbero apparire dei semplici modelli meccanici.

Consideriamo un semplice modello reologico molla-smorzatore. Sia α_m l'allungamento della molla e α_s lo spostamento dello smorzatore dalla sua posizione iniziale. La forza esplicita dalla molla è proporzionale ad α_m e quella dello smorzatore ad $\dot{\alpha}_s$. Assumiamo che la forza esterna agisca lentamente in modo che siano trascurabili le variazioni di temperatura e le forze d'inerzia.

Allora la forza esterna sarà funzione non solo dell'allungamento totale ϵ ma dei due parametri α_m ed α_s col vincolo che $\alpha_m + \alpha_s = \epsilon$.

Tanto per fissare le idee, si supponga il caso di molla e smorzatore in parallelo (modello che conduce al materiale alla Maxwell); per semplicità i calcoli saranno svolti solo nel caso unidimensionale; il caso generale è facilmente reperibile in testi specifici.

Si consideri come variabile cinematica l'allungamento totale ϵ e come variabile interna α l'allungamento della molla. Allora si scriverà

$$\sigma = E\alpha = F(\dot{\epsilon} - \dot{\alpha})$$

essendo F la costante dello smorzatore. Le forze generalizzate sono deducibili dalla energia libera

$$\rho\psi = \frac{E\alpha^2}{2}$$

e dalla funzione di dissipazione

$$\rho\phi = F(\dot{\epsilon} - \dot{\alpha})^2$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\beta^{(r)} &= E\alpha \\ \sigma^{(r)} &= 0 \\ \beta^{(d)} &= -F(\dot{\epsilon} - \dot{\alpha}) = -E\alpha \\ \sigma^{(d)} &= F(\dot{\epsilon} - \dot{\alpha}) = E\alpha\end{aligned}$$

Si deve notare che i valori delle forze interne cambierebbero per una diversa scelta della variabile interna.

7 Termodinamica della plasticità

Sappiamo che l'energia interna specifica ψ dipende dalle variabili di stato osservabili ed interne:

$$\psi = \psi(\epsilon, T, \epsilon^e, \epsilon^p, V_k)$$

essendo le V_k delle generiche variabili interne che ci riserviamo di precisare di volta in volta in base alla fisica del problema esaminato (in un caso interessante una di queste variabili sarà proprio il danno).

Nella elastoplasticità e nella elastoviscoplasticità si postula che le ϵ intervengano solo attraverso la loro decomposizione $\epsilon - \epsilon^p = \epsilon^e$, cioè

$$\psi = \psi(\epsilon^e, T, V_k)$$

il che significa che l'energia libera è funzione solo della deformazione elastica (che è reversibile), e ciò è abbastanza in armonia con l'intuizione, visto che l'energia libera è in qualche modo un'energia "disponibile" che il sistema può restituire in ogni momento.

Differenziando rispetto al tempo l'energia libera si ha:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon^e} : \dot{\epsilon}^e + \frac{\partial\psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial\psi}{\partial V_k} \dot{V}_k$$

e sostituendo nell'equazione di Clausius-Duhem si ha

$$\left(\sigma - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon^e} \right) : \dot{\epsilon}^e + \sigma : \dot{\epsilon}^p - \rho \left(s + \frac{\partial\psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}T}{T} \geq 0$$

Con opportuni passaggi (da evidenziare, logicamente, in fase di stesura finale) riusciamo ad eliminare le due parentesi tonde, per cui

$$\sigma = \rho \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon^e}$$

$$s = -\frac{\partial\psi}{\partial T}$$

Volendo si possono introdurre le forze generalizzate coniugate alle variabili interne:

$$A_k = \rho \frac{\partial\psi}{\partial V_k}$$

Con tali posizioni l'equazione di Clausius-Duhem si scrive:

$$\sigma : \dot{\epsilon}^p - \rho \frac{\partial\psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}T}{T} \geq 0$$

e il primo membro di questa espressione è detto *potenza dissipata*.