

Le isodine: un approccio teorico

di F. Caputo e G. Giudice

Viene prospettato un approccio teorico per la determinazione delle isodine, già rese note sperimentalmente dai lavori di J. T. Pindera. Il metodo fotoelastico integrato messo a punto da questo autore permette di determinare per via sperimentale tutte le componenti di sollecitazione presenti in uno stato piano di tensione o di deformazione. Nel presente lavoro si mostra come le stesse isodine siano ricavabili per via teorica attraverso la teoria classica dell'elasticità.

Introduzione

Gli stati piani di tensione e di deformazione in corpi isotropi sono, com'è ben noto, rappresentabili con l'ausilio di una serie di famiglie di curve di livello di campi scalari o di linee di flusso di campi vettoriali ad essi opportunamente correlati. Nel gruppo per prima citato sono da annoverarsi le isobare, le isoteniche, le isopachiche, le isocromatiche e le isocline; al secondo appartengono invece le isostatiche e le isodine. Le principali proprietà di queste curve sono state brevemente illustrate in un precedente lavoro apparso su questa stessa rivista [1].

Le isodine consentono di rappresentare sinteticamente l'intero stato tensionale e di utilizzare, in forma rigorosa, le ben note analogie idrodinamiche. Esse possono inoltre essere determinate facilmente per via analitica o numerica, utilizzando le proprietà di opportune funzioni potenziali e possono essere visualizzate grazie al già citato procedimento fotoelastico in luce coerente.

Per quanto segue si ritiene opportuno premettere alcune considerazioni relative allo stato tensionale di cui si tratterà.

Sia assegnato un corpo cilindrico, a generatrici rettilinee parallele all'asse z e a sezione qualsiasi, una o più volte connessa, caricato mediante forze applicate su basi e sulla superficie laterale, oltre che da forze di massa. Si supponga che le forze applicate alla superficie laterale siano normali alle generatrici e non varino lungo queste e che le componenti parallele agli assi x e y delle forze di massa derivino da un potenziale, mentre la componente parallela all'asse z sia nulla.

Con queste ipotesi è ragionevole supporre che le componenti della tensione agenti sulle sezioni normali all'asse del cilindro, e quindi le σ_x , σ_y e τ_{xy} , siano indipendenti dalla coordinata z . Si può dimostrare, integrando le equazioni di congruenza, che il vettore spostamento $s(u,v,w)$, supposto piccolo, può essere considerato somma di uno spostamento rigido, di una rotazione rigida, di due flessioni, nel piano xz ed in quello yz , di una torsione attorno all'asse z

senza ingobbamento delle sezioni normali e di uno spostamento non dipendente da z , ossia tale che

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Questo spostamento causa delle deformazioni non dipendenti da z che originano un particolare stato di deformazione denominato "stato piano generalizzato di deformazione".

Questo concetto rivela tutta la sua utilità nel caso di materiali anisotropi, per i quali non è lecito in generale supporre la presenza di uno stato piano di deformazione né che si verifichino le

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

L'assunzione introdotta renderebbe infatti impossibile soddisfare alle equazioni indefinite dell'equilibrio. Essa è lecita solo per particolari forme di anisotropia, oltre che per i corpi isotropi e costituisce, com'è evidente, un caso particolare dello stato generalizzato piano di deformazione.

Se si introducono invece le condizioni

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

che caratterizzano lo stato piano di tensione, nelle equazioni di congruenza e si procede all'integrazione di esse, si perviene a valori di σ_x , σ_y e τ_{xy} dipendenti da z . Ciò significa che per aversi uno stato piano di tensione occorre che il predetto cilindro sia caricato da forze diverse da zero solo sulla superficie laterale e variabili con z . Poiché nella maggior parte dei problemi che si ha la necessità di risolvere ai fini delle pratiche applicazioni le forze sulle superfici laterali non variano lungo le generatrici, le soluzioni fornite dalla considerazione dello stato piano di tensione risultano solo approssimate. Tali soluzioni sono però praticamente rigorose per il caso di cilindro di altezza trascurabile rispetto alle altre due dimensioni e quindi per il caso di lastre caricate lungo il bordo.

Proprietà delle isodine

Dato un corpo qualsiasi in uno stato di tensione generico si imponga ad esso uno spostamento virtuale rigido in una direzione i assegnata. Il lavoro virtuale

Francesco Caputo svolge la sua attività di docente di Costruzione di Macchine presso la Facoltà d'Ingegneria dell'Università degli Studi di Napoli; Giuseppe Giudice, laureato in Ingegneria Meccanica, è borsista dell'ATA, Associazione Tecnica dell'Automobile, presso la stessa Facoltà.

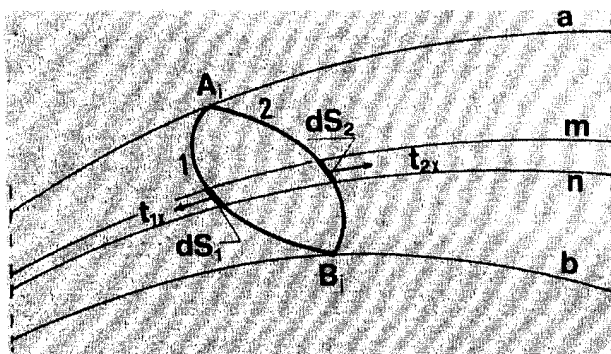


Figura 1 - Il valore dell'integrale curvilineo tra due punti A e B del campo di isodine è indipendente dal cammino di integrazione.

le compiuto dagli sforzi interni in una parte del corpo può essere espresso come integrale, esteso alla superficie che delimita tale parte, del prodotto scalare di un vettore J , per la superficie elementare ndS orientata verso l'esterno della parte considerata. Il vettore ora citato viene definito nel modo seguente:

$$J_i = \tau \cdot i$$

ove τ è il tensore degli sforzi interni e i è il versore della direzione lungo la quale il corpo viene spostato.

Poiché il lavoro viene qui calcolato con un procedimento analogo a quello con cui si calcola il flusso di una grandezza scalare attraverso una data superficie risulta naturale denominare il vettore J con il nome di "flusso di lavoro virtuale".

Se si suppone di sezionare il corpo in un punto P con una superficie di normale i lo sforzo interno

$$t_i = \sigma_i i + \tau_i$$

su questa superficie nel punto P risulta

$$t_i = \tau i = J_i$$

Il vettore J_i rappresenta quindi anche lo sforzo su una superficie di normale i ; da ciò deriva il nome di "flusso di forza" con cui lo si trova talvolta indicato.

Le linee di flusso dei vettori J_i e t_i saranno indicate come isodine relative alla direzione i .

La già dimostrata identità dei vettori J_i e t_i può essere impiegata per illustrare alcune fondamentali proprietà di essi e della famiglia di isodine costituita dalle loro linee di flusso.

Si noti innanzitutto che lo stato tensionale in ciascun punto è determinato dai tre vettori t_x, t_y, t_z relativi a tre direzioni mutuamente ortogonali; allo stesso modo esso sarà in generale noto dalla conoscenza delle tre famiglie di isodine relative alle tre direzioni coordinate. In quanto segue si ipotizzerà l'esistenza di uno stato piano di tensione, per cui le famiglie di isodine significative saranno solo due. In particolare si riterrà il piano delle tensioni coincidente col piano xy e sarà presa in considerazione la sola famiglia di isodine relative all'asse x ; le conclusioni cui si perverrà saranno peraltro valide per qualsiasi altra famiglia di isodine.

Si individui un elemento infinitesimo di volume delimitato da quattro facce piane parallele all'asse z e

quindi ortogonali al piano delle tensioni, e che risultino inoltre a due a due parallele rispettivamente all'asse y ed alle isodine relative alla direzione x ; la distanza tra le due isodine prescelte sia dy . Applicando le equazioni di Cauchy alle due facce parallele alle isodine si verifica immediatamente che le tensioni su esse agenti risultano normali all'asse x onde l'isodina, in generale, può essere definita come il luogo delle direzioni lungo le quali la tensione agente è sempre normale ad un'assegnata direzione. Dalle definizioni introdotte si trae subito

$$\int_{A_1}^{B_1} \sigma_x dy = \int_{A_2}^{B_2} \sigma_x dy = \dots = \int_{A_i}^{B_i} \sigma_x dy$$

dove $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_i, B_i)$ sono coppie di punti di uguale ascissa x appartenenti a due generiche isodine della famiglia relativa alla medesima direzione x .

Ed ancora, con riferimento a due generici punti A_i e B_i appartenenti alle due isodine a e b (figura 1), si evince che l'integrale

$$\int_{A_i}^{B_i} t_{ix} dS_n$$

risulta indipendente dal particolare cammino n di integrazione e dipende solo dalla scelta delle isodine a e b . Considerando infatti che possibili percorsi di integrazione 1 e 2, per l'equilibrio nella direzione x delle forze agenti sull'elemento individuato come nella citata figura 1, con le notazioni ivi introdotte può sciversi

$$t_{1x} dS_1 = t_{2x} dS_2$$

Questa proprietà rivela che le funzioni

$$F_x = \int_A^B \sigma_y dx$$

$$F_y = \int_A^B \sigma_x dy$$

sono funzioni potenziali e che è possibile definire le due famiglie di isodine, relative all'asse e ed all'asse y , come luogo dei punti in cui ciascuna delle due predette funzioni assume un valore determinato.

È immediato inoltre constatare che le due funzioni F_x ed F_y sono date da

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}; F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

dove F è la ben nota funzione di Airy.

Le isodine vengono in tale modo ad essere definite come curve di livello delle derivate della funzione di Airy.

Determinazione analitica delle isodine

I problemi piani della teoria dell'elasticità vengono com'è noto risolti determinando per il corpo in studio, matematicamente rappresentato da un dominio del piano xy , una funzione di Airy compatibile con le assegnate condizioni al contorno; per quanto fin qui detto si può tradurre tale problema in quello della determinazione delle due funzioni F_x ed F_y .

La trattazione più semplice di tali problemi viene effettuata invocando la teoria delle funzioni di variabile complessa. In tal modo le coordinate x ed y

diventano rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario dell'unica variabile complessa $\zeta = x + iy$ e la funzione di Airy viene considerata una funzione $F(\zeta)$ reale di variabile complessa. Si dimostra [2] che, se φ e χ sono due funzioni olomorfe della variabile ζ , la condizione di biarmonicità di F si traduce nell'espressione seguente:

$$2F(\zeta) = \bar{\zeta} \varphi(\zeta) + \zeta \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) + \chi(\zeta) + \bar{\chi}(\bar{\zeta})$$

dove il sovrascritto indica l'operazione di coniugazione. Introducendo la nuova variabile complessa

$$f(\zeta) = \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = F_x + i F_y$$

si ha:

$$f(\zeta) = \varphi(\zeta) + \zeta \bar{\varphi}'(\bar{\zeta}) + \psi(\zeta) \quad (1)$$

nella quale

$$\psi(\zeta) = \frac{\partial \chi(\zeta)}{\partial \zeta}$$

Le due funzioni φ e ψ devono ovviamente essere determinate facendo uso delle opportune condizioni al contorno, ossia, per domini semplicemente connessi:

$$f = f_1 + i f_2$$

dove:

$$f_1 = \int_{\gamma_0}^{\zeta} y_n(\zeta) d\zeta; \quad f_2 = \int_{\gamma_0}^{\zeta} x_n(\zeta) d\zeta$$

x_n ed y_n essendo le componenti lungo x e lungo y della forza esterna e l'integrale essendo svolto lungo il contorno.

La (1) lega le due funzioni F_x ed F_y alle funzioni φ e

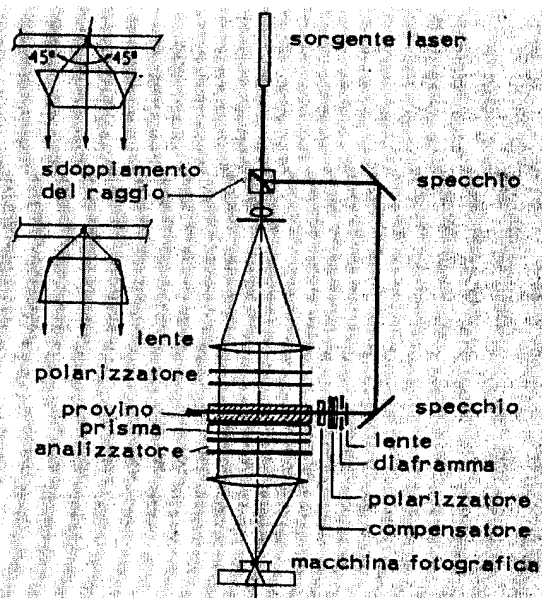


Figura 2 - Disegno schematico del polariscopio integrato messo a punto da Pindera, [3].

ψ ben note nelle trattazioni di teoria dell'elasticità e consente quindi di determinare le due famiglie di isodine senza determinare preventivamente la funzione di Airy. Quanto fin qui detto può estendersi senza difficoltà anche a domini pluriconnessi e a domini illimitati.

Il procedimento generale fin qui prospettato si semplifica notevolmente se il dominio è di forma geometricamente definita ed in particolare se il contorno è costituito da una circonferenza o da due circonferenze concentriche. In tali ultimi casi è infatti possibile sviluppare le funzioni che compaiono nella (1) in serie di Fourier.

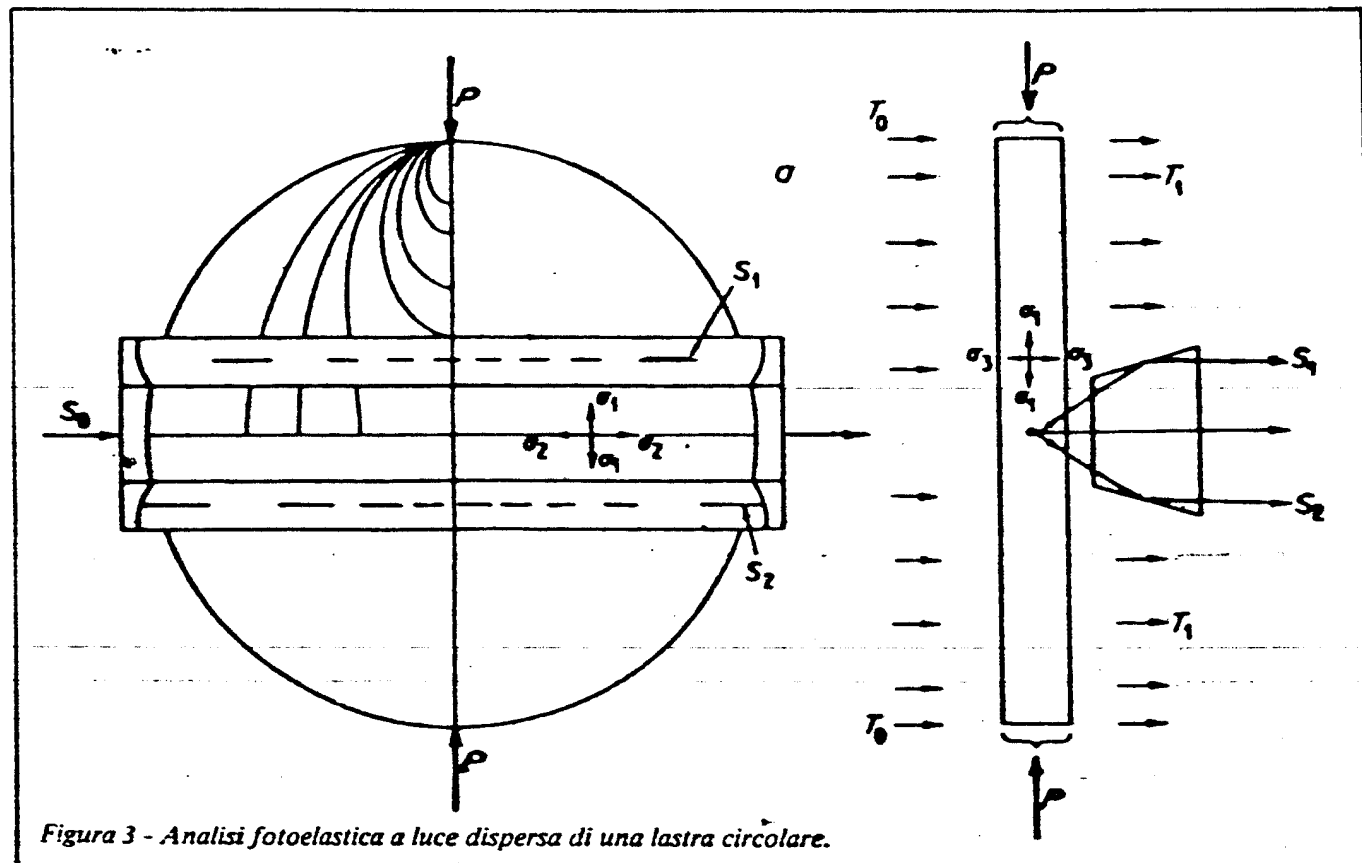


Figura 3 - Analisi fotoelastica a luce dispersa di una lastra circolare.

le condizioni geometriche richieste per Itale sviluppo, a prima vista molto restrittive, lo sono molto meno appena si consideri che qualsiasi dominio, per i fini che qui interessano, può essere trasformato in un altro avente lo stesso grado di connessione, mediante una trasformazione conforme [2]. Al caso di dominio circolare è dunque assimilabile qualsiasi dominio semplicemente connesso, anche se di forma poligonale, purché in quest'ultimo caso sia lecito approssimare il contorno assegnato con un altro privo di punti angolosi. Allo stesso modo ogni dominio due volte connesso può essere ricondotto al caso della corona circolare.

Determinazione sperimentale delle isodine

Per poter visualizzare sperimentalmente le isodine in un elemento strutturale si fa ricorso alla fotoelasticità per trasmissione impiegando appositi modelli. La tecnica di sperimentazione e la strumentazione occorrente sono state proposte da Pindera e collaboratori e sono esaurientemente descritte in letteratura [3 ÷ 6].

Il principio fisico su cui il metodo si basa è l'effetto di dispersione ("scattering") di un raggio di luce coerente che attraversa, nel suo piano mediano, un modello fotoelastico bidimensionale. Tale dispersione, in un piano poco inclinato rispetto alla giacitura del modello, rende visibili determinati intervalli del percorso del raggio, che appare quindi in forma di tratti luminosi discontinui.

Con una certa approssimazione si può ritenere che i punti medi dei segmenti luminosi siano le interse-

zioni del raggio con alcune curve di una delle due famiglie di isodine. Facendo traslare parallelamente a se stesso il raggio si ottengono perciò tutti i punti delle suddette curve.

Impiegando poi un altro raggio normale al precedente e anch'esso contenuto nel piano del modello si ottengono le curve dell'altra famiglia.

Il disegno schematico dell'apparecchiatura sperimentale è riportato in figura 2. I dettagli costruttivi e di funzionamento di essa sono esaurientemente descritti nei già citati lavori [3 ÷ 6].

La figura 3 mostra ancora il disegno schematico di un provino fotoelastico di forma circolare caricato per compressione sulle estremità di un diametro. Risultano visibili il prisma integratore ed i segmenti luminosi generati dal raggio che percorre il modello lungo l'asse di simmetria del prisma. Si noti che a ciascun tratto chiaro S_1 che appare nella parte superiore del prisma fa riscontro, in basso, un equivalente tratto scuro S_2 e viceversa.

La tecnica sperimentale basata sul tracciamento delle isodine è stata di recente impiegata per lo studio fotoelastico bidimensionale di una vasta gamma di casi di analisi delle sollecitazioni; in particolare essa si è rivelata di indubbia utilità nei problemi di contatto tra elementi piani [7] e di altra geometria. Nelle figure 4 e 5 sono state tracciate le isodine relative al caso della lastra piana forata, sollecitata a trazione secondo la direzione dell'asse x . In ciascuna figura viene riportato, a motivo della doppia simmetria esistente, solo un quarto della lastra. Nella figura 4 sono tracciate le isodine F_x ; nella figura 5 quelle F_y .

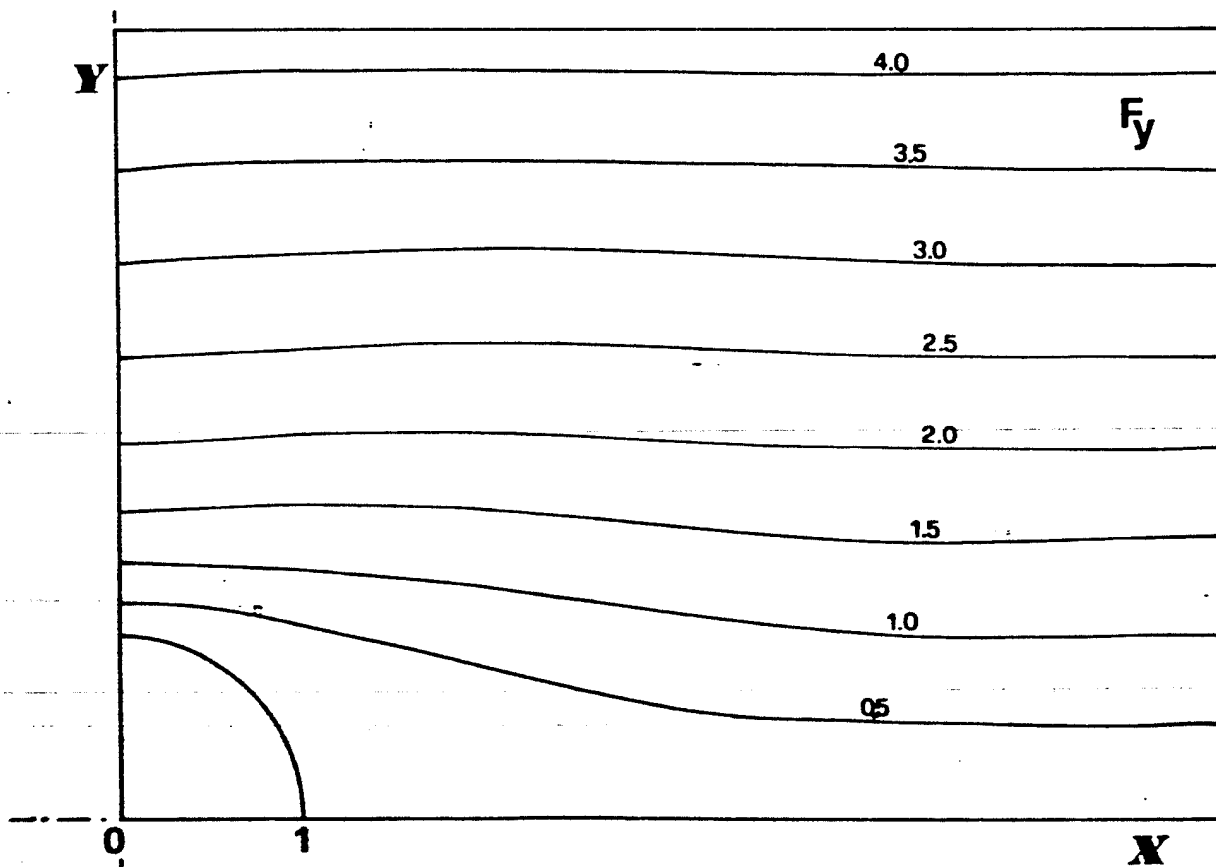


Figura 4 - Andamento delle isodine F_y in una lastra piana forata soggetta a trazione secondo l'asse x .

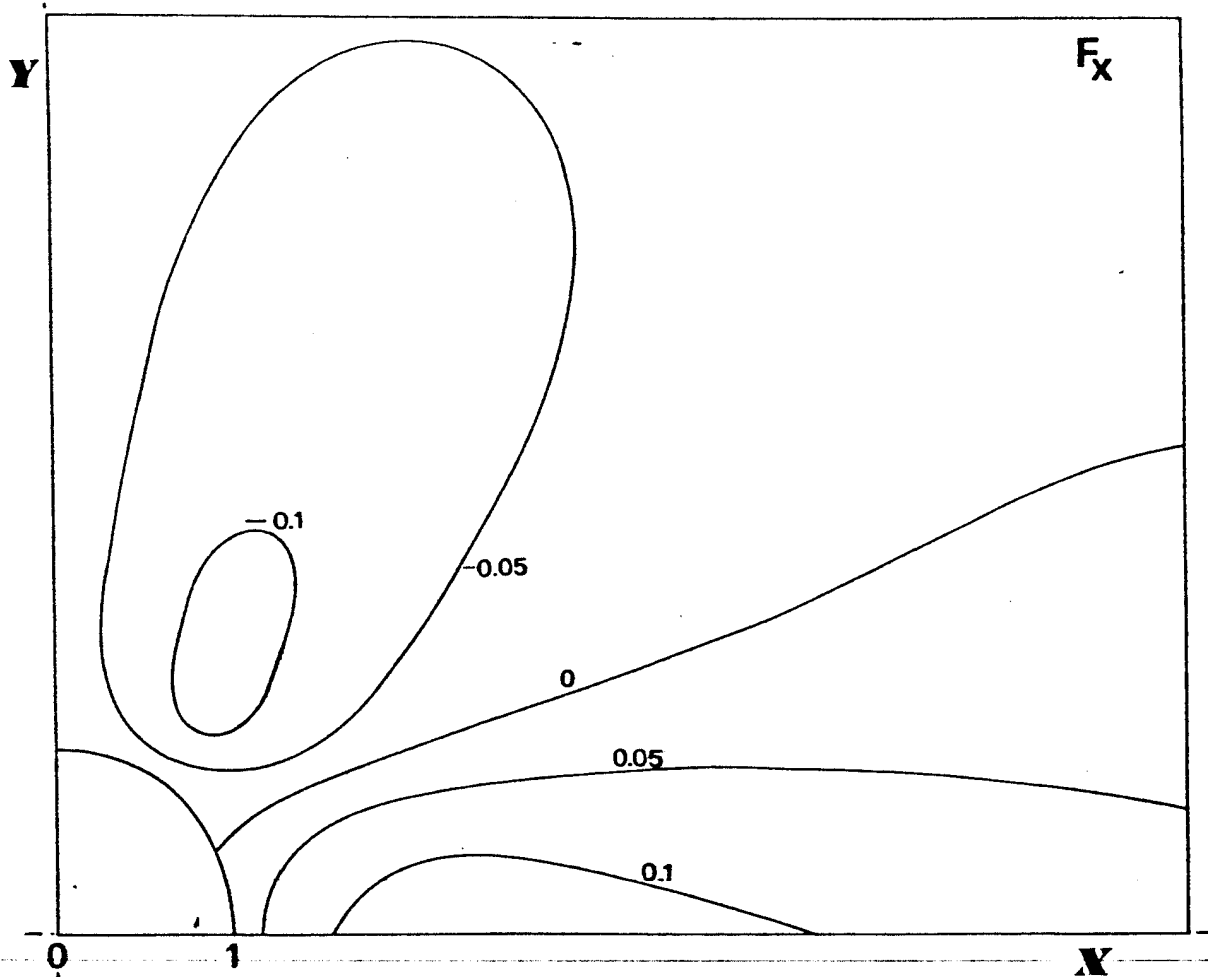
Considerazioni conclusive

Nel presente lavoro è stato introdotto lo studio teorico delle curve isodine già note per essere state oggetto di approfondite ricerche sperimentali condotte particolarmente da Pindera e collaboratori. L'approccio qui seguito ed il metodo di calcolo presentato consentono di studiare un qualsivoglia problema di elasticità piana individuando lo stato tensionale globale esistente. L'algoritmo di risoluzione prospettato appare particolarmente idoneo per essere impiegato con l'ausilio di elaboratori, che offrono anche l'opportunità di una immediata ed agevole rappresentazione grafica delle famiglie di curve di cui si tratta.

Una ulteriore possibilità del metodo riguarda la sua applicazione ad elementi strutturali realizzati con materiali anisotropi. Questo caso particolare non comporterebbe infatti alcuna complicazione concettuale ma solo l'introduzione di ulteriori funzioni potenziali mediante le quali sarebbe ancora possibile tracciare le curve isodine.

Gli autori si ripromettono di poter entro breve tempo riferire su concrete applicazioni del metodo sia al caso per ultimo menzionato dei materiali anisotropi sia ad altri classici problemi dei quali sia già nota la soluzione in forma chiusa o per i quali risulti disponibile in letteratura lo studio sperimentale onde poter assicurare il necessario "controllo" dei risultati ottenuti.

Figura 5 - Andamento delle isodine F_x in una lastra piana forata soggetta a trazione secondo l'asse x .



Bibliografia

- [1] CAPUTO F. - GIUDICE G.: "Sulle proprietà di particolari famiglie di curve nell'analisi delle tensioni". Progetto, N. 10, ottobre 1981.
- [2] MUSKHELISHVILI N.I.: "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity", P. Noordhoff, Groningen, 1963.
- [3] PINDERA J.T. - STRAKA P.: "Response of the integrated Polariscope" Journal of Strain Analysis, Vol 8 N. 1, 1973.
- [4] PINDERA J.T.: "Photoelastic Isodynes: A new type of stress - modulated light intensity distribu-

tion" Mech. Res. Comm. Vol 4 (4) 247-252, Pergamon Press, 1977.

[5] PINDERA J.T. - MAZURKIEWICZ S.B. - KEPICH T.Y.: "Photoelastic Isodynes in static and dynamic stress analysis" Vol II, 7th Congress on material testing, Budapest, 9-13 October 1978, Omkdk - Technoinform, Budapest, 1978.

[6] MAZURKIEWICZ, S.B. - PINDERA, J.T.: "Integrated - plane photoelastic method - Application of photoelastic isodynes". Exp Mech., Vol 19 n. 7, July 1979

[7] PINDERA J.T. - SZE Y.: "Response of Elastic Plates in flat Contact", Proc. Int. Symp. Exp. Mech. University of Waterloo, Canada, June 1972.