

7. Plasticità

Deformazioni plastiche sono quelle che permangono anche dopo che è stata rimossa la forza che le ha generate.

Il comportamento plastico è evidente e.g. nella prova di trazione di molti materiali metallici; se la tensione supera un certo valore di soglia (snervamento) allo scarico rimane un allungamento residuo.

I materiali che presentano un comportamento plastico più o meno accentuato sono detti materiali duttili; quelli che si rompono prima di subire apprezzabili deformazioni plastiche sono detti materiali fragili.

7.1 Fenomenologia della plasticità

Nella prova di trazione di materiali duttili appare chiara la zona delle forte deformazioni (cammino OAR della fig. 7.1)

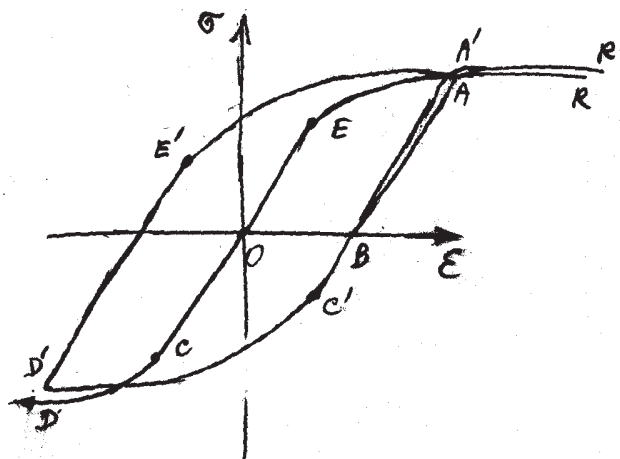


Figura 7.1: Fenomenologia della plasticità

Se il provino viene scaricato si ha un parziale recupero, ma la maggior parte della deformazione è permanente (o irreversibile che dir si voglia).

La fase di scarico (AB) è sostanzialmente rettilinea e la sua pendenza è praticamente uguale a quella del tratto elastico iniziale (è alquanto minore solo per altissime deformazioni, quando si è già avuto un sostanziale danneggiamento del materiale).

Se si ricarica il provino deformato plasticamente e scaricato esso ripercorre il cammino elastico dello scarico e poi riprende la curva plastica, quasi come se la prova non fosse stata interrotta (BA'R').

Se invece dopo lo scarico il provino viene assoggettato ad un carico di verso opposto (cioè di compressione, se la prima sollecitazione era di trazione), esso segue ancora un cammino elastico (BC') sul prolungamento della retta di scarico, e poi devia (C'D') plasticizzandosi in senso opposto

ma ad un valore della tensione minore di quello di snervamento in compressione del materiale vergine (C' invece di C). Questa 'anticipazione' dello snervamento va sotto il nome di *effetto Bauschinger*.¹

Lo stesso fenomeno si riscontra in senso opposto, se si inverte ancora il carico (D'E'). Al limite, il materiale può percorrere il ciclo plastico ABD'E'A). Disgraziatamente esso, se percorso più e più volte, non rimane stazionario, ma si deforma diventando più "verticale" (incrudimento ciclico) o più "orizzontale" (addolcimento ciclico). Questa fenomenologia si incontra nella fatica oligociclica.

7.2 Cause della plasticità

La plasticità è dovuta alla deformazione permanente del reticolo cristallino; per spiegarla si deve perciò abbandonare la descrizione continua del materiale.

I metalli sono formati da un reticolo di ioni circondati da un gas di elettroni di conduzione. Gli ioni sono di solito sistemati in un reticolo a massimo impaccamento, ossia cubico a facce centrate o esagonale compatto; talvolta è presente il reticolo cubico a corpo centrato.

Nella deformazione permanente si può supporre che i piani atomici slittino l'uno rispetto all'altro. Questo comunque è possibile solo per i piani a massima densità di atomi.

Una deformazione permanente è anche irreversibile, quindi si ha aumento dell'entropia del metallo o dell'ambiente o di entrambi.

La forza necessaria per spostare un piano di atomi rispetto a quello adiacente è notevole. È chiaro infatti che si ha bisogno di deformazioni tangenziali dell'ordine di 1, per cui la forza tangenziale deve essere dell'ordine di G .

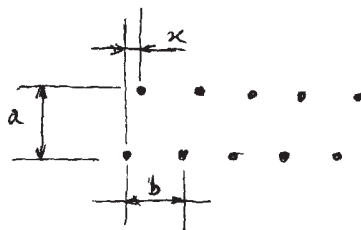


Figura 7.2: Determinazione teorica della tensione di plasticizzazione in un cristallo perfetto.

Più precisamente si consideri la situazione di fig. 7.2, nella quale vi sono due file di atomi contrapposti. Se la fila superiore viene spostata verso destra di una quantità x , nasce una tensione tangenziale τ esprimibile secondo una legge periodica di periodo b , che in prima approssimazione si può considerare sinusoidale

$$\tau = \tau_m \sin(2\pi x/b).$$

Questa, per piccoli valori di x diventa

$$\tau = \tau_m (2\pi x/b).$$

Poiché vale anche la legge di Hooke

$$\tau = G\gamma = Gx/a$$

¹Johann Bauschinger, ingegnere (Norimberga, 1834 - Monaco di Baviera 1893), ricordato per un monumentale Trattato di statica grafica (trad. it. 1871).

risulta

$$\tau_m = \frac{G b}{2\pi a},$$

che, per $a = b$ diventa

$$\tau_m = \frac{G}{2\pi}$$

Il valore così ottenuto è circa cento volte maggiore di quello effettivo, per cui occorre trovare una diversa spiegazione, che è data dalla presenza di difetti nel reticolo cristallino.

I difetti reticolari possono essere puntiformi (vacanze, atomi interstiziali e atomi sostituzionali), lineari (dislocazioni), superficiali (bordi dei grani) o tridimensionali (inclusioni).

Le vacanze sono siti del reticolo non occupati da un atomo; gli atomi interstiziali sono atomi presenti in posizioni che dovrebbero essere vuote, mentre gli atomi sostituzionali sono atomi di specie estranea che prendono il posto di quelli che costituiscono il reticolo.

Nei metalli vi è sempre un certo numero di vacanze, in equilibrio termodinamico; gli interstiziali sono senz'altro meno numerosi e gli atomi sostituzionali sono importanti soprattutto nelle leghe.

Le dislocazioni sono date da una distorsione del reticolo che si può caratterizzare nel seguente modo: si descriva un cammino su un piano cristallino in modo da avanzare in una direzione di un certo numero di passi, poi si gira a destra ad angolo retto e si avanza di altrettanti passi, poi ancora a destra eccetera, per quattro volte; se il cammino è molto piccolo (pochi passi reticolari per lato) e si chiude su se stesso, vuol dire che nell'areola percorsa non vi sono dislocazioni; altrimenti la quantità necessaria a chiudere il circuito dà il *vettore di Burgers*² della dislocazione concatenata col circuito.

La dislocazione all'interno del cristallo è sempre una linea chiusa e il vettore di Burgers è costante su di essa; essa può terminare solo sulla faccia del cristallo o su una superficie di separazione tra cristalli contigui.

Se il vettore di Burgers è parallelo alla dislocazione si ha la *dislocazione a vite*; se è perpendicolare si ha la *dislocazione a spigolo*; in quest'ultimo caso il piano formato dalla dislocazione e dal vettore di Burgers è detto *piano di scorrimento* in quanto su di esso il moto della dislocazione è favorito.

La plasticità è in gran parte causata dal moto delle dislocazioni a spigolo sul proprio piano di scorrimento.

In un cristallo le dislocazioni provocano una tensione perché i legami cristallini sono distorti; lo stato tensionale attorno ad una dislocazione è identico a quello intorno ad una distorsione di Volterra.

In particolare, attorno alle dislocazioni a spigolo, vi è un semispazio teso e un semispazio compresso; in quest'ultimo tendono ad addensarsi le vacanze, mentre nel primo tendono ad addensarsi gli eventuali interstiziali; gli atomi sostituzionali possono andare in questo o quel semispazio a seconda che il loro diametro sia maggiore o minore di quello degli atomi costituenti il reticolo; in questo modo le dislocazioni a spigolo sono circondate da una nube di difetti puntuali che non possono abbandonare a meno che non venga fornita energia dall'esterno.

Se le forze esterne sono inferiori ad un certo valore le dislocazioni non si muovono e quindi si ha comportamento elastico, al di sopra di un certo valore le dislocazioni diventano libere di muoversi, e ciò spiega il fenomeno dello snervamento.

Al crescere della deformazione il numero di dislocazioni aumenta per l'azione delle sorgenti di dislocazioni, la più celebre delle quali è quella di Frank-Read (fig. 7.3).

Le dislocazioni generate da una sorgente di Frank-Read si muovono lungo lo stesso piano di scorrimento e terminano la loro corsa lungo un ostacolo che tipicamente è il bordo del grano. L'affollarsi delle dislocazioni molto vicine tra loro genera una forza di repulsione che ostacola l'ulteriore moto (fenomeno dell'incrudimento).

²Johannes Martinus Burgers fisico olandese poi trasferitosi negli USA (n. Arnhem 1895, m. 1981). Ha svolto ricerche di aerodinamica, di reologia e di fisica dei solidi.

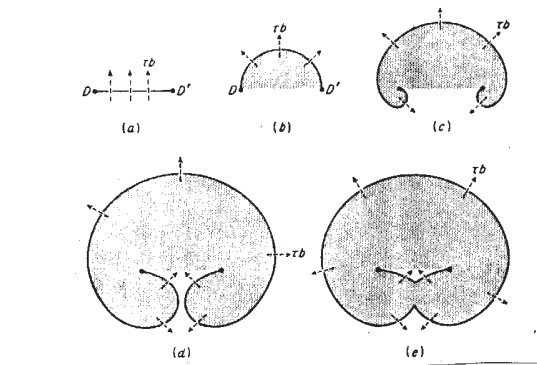


Figura 7.3: Sorgente di Frank-Read

La stessa repulsione, in caso di cambiamento di segno dello sforzo, provoca un moto anticipato delle dislocazioni e quindi uno snervamento ad una tensione più bassa in valore assoluto (effetto Bauschinger).

7.3 Teorie matematiche della plasticità

La deformazione plastica dipende non solo dal valore degli sforzi attuali, ma anche dal cammino percorso; ciò rende formidabilmente difficile una teoria matematica della plasticità. Le trattazioni possono essere divise in due classi: *Teorie di flusso* che mettono in relazione lo sforzo con la velocità di deformazione e *teorie deformative* che mettono in relazione la deformazione con la tensione; queste ultime ovviamente possono funzionare solo se si ipotizza un particolare cammino, per esempio che tutte le componenti della tensione si incrementano proporzionalmente.

Tutte le teorie della plasticità si basano sui seguenti postulati:

1. la parte sferica della deformazione plastica è nulla, quindi la deformazione plastica avviene senza variazione di volume;
2. la deformazione (o l'incremento della deformazione, a seconda della teoria usata) dipende solo dalla parte deviatorica dello sforzo;
3. gli assi principali della tensione e della deformazione plastica sono coincidenti (questo fatto fu scoperto da de Saint Venant);
4. la deformazione plastica è irreversibile;
5. lo scarico avviene elasticamente.

Teoria di Levy-von Mises

Si basa sul postulato che le deformazioni plastiche sono trascurabili e che il materiale non subisce incrudimento (materiale rigido-plastico).

Teoria di Prandtl-Reuss

Si basa sul postulato che il materiale è perfettamente elastico fino allo snervamento e non subisce incrudimento (materiale elastico-perfettamente plastico).

Teorie deformative

Tra esse cito solo quella di Hencky, secondo la quale il deviatore degli sforzi è proporzionale al deviatore delle deformazioni plastiche.

7.4 Tensioni residue

TRAVE RETTANGOLARE INFLESSA

Il classico esempio della trave rettangolare inflessa viene qui svolto con riferimento ad un materiale con comportamento simmetrico a trazione e a compressione. Per la trattazione più generale si veda il Timoshenko.

Nella deformazione plastica delle travi si fanno alcune assunzioni semplificative, cioè che le sezioni inizialmente piane rimangano piane e che non ci siano sforzi secondari dovuti alla congruenza tra parte plasticizzata e parte elastica della trave.

Nel caso qui studiato si suppone che la sollecitazione esterna sia di puro momento flettente, che corrisponde ad una deformazione dell'asse della trave ad arco di circonferenza.

Si suppone assegnata una relazione sforzo-deformazione $\sigma = \sigma(\epsilon)$, simmetrica come si è detto, e che il carico iniziale sia applicato in maniera monotona.

Si ragiona in termini di deformazione iniziale imposta, con una graduale crescita della curvatura dell'asse della trave. Se la trave, inizialmente rettilinea, è deformata con un raggio di curvatura R_i la deformazione è

$$\epsilon = \frac{y}{R_i}.$$

Facendo intervenire la $\sigma = \sigma(\epsilon)$ si trova la relazione $\sigma = \sigma(\epsilon(y)) = \sigma(y)$ tra tensione e dimensione trasversale della trave. Se la deformazione massima $\epsilon_{max} = h/R_i > \epsilon_{is} = \sigma_y/E$, dove h è la semialtezza della trave e ϵ_{is} è la deformazione che corrisponde all'inizio dello snervamento, una parte della trave, cioè quella con $|y| > h_y$, essendo h_y la distanza dall'asse neutro della fibra in snervamento, è plasticizzata.

In ogni caso il momento flettente, se b è la larghezza, è

$$M = \int_{-h}^h \sigma b y dy. \quad (1)$$

Nel caso puramente elastico $\sigma = E\epsilon = Ey/R_i$, per cui

$$M = \int_{-h}^h \frac{Ey}{R_i} b y dy$$

cioè

$$M = \frac{EI}{R_i}. \quad (2)$$

Nel caso plastico conviene elaborare la (1) sostituendo alla variabile muta y la ϵ . Si trova allora

$$M = \int_{-h/R_i}^{h/R_i} \sigma b \cdot \epsilon R_i \cdot R_i d\epsilon = b R_i^2 \int_{-h/R_i}^{h/R_i} \sigma \epsilon d\epsilon$$

che formalmente può essere posta in una forma identica alla (2), ossia

$$M = \frac{E_{R_i} I}{R_i}. \quad (2')$$

con la posizione

$$E_{R_i} = \frac{3R_i^3}{2h^3} \int_{-h/R_{pl}}^{h/R_{pl}} \sigma \epsilon d\epsilon$$

Non è difficile vedere che vale $E_{R_i} \leq E$, valendo il segno di uguaglianza solo nel caso elastico.

Se si scarica la trave applicando un momento $-M$ il comportamento allo scarico è elastico (a meno che il momento non sia molto alto, nel qual caso interviene l'effetto Bauschinger). La curvatura residua è data dalla somma di quella iniziale e quella della fase di scarico elastico

$$\frac{1}{R_f} = \frac{1}{R_i} - \frac{M}{EI} = \frac{M}{I} \left(\frac{1}{E_{R_i}} - \frac{1}{E} \right)$$

Per le tensioni conviene procedere per via grafica (fig. 7.4).

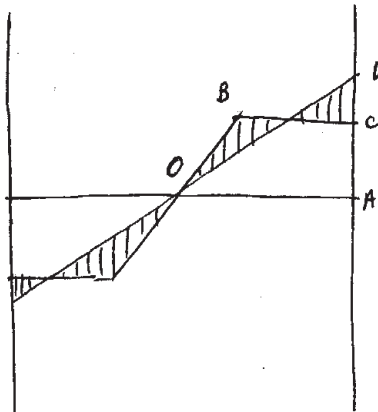


Figura 7.4: Determinazione grafica delle tensioni residue in una trave inflessa ad asse verticale

Lo studio della figura suggerisce la regola pratica che, nella fibra più sollecitata la tensione residua è di segno opposto a quella della tensione iniziale che ne ha provocato lo snervamento.

Si noti che le tensioni residue non hanno in generale alcuna relazione con le deformazioni residue, in quanto in generale le une e le altre dipendono dal percorso di carico e scarico.