

6. Instabilità dell'equilibrio elastico

6.1 Introduzione

6.1.1 DEFINIZIONE DI INSTABILITÀ

La Resistenza dei Materiali e la Teoria dell'Elasticità studiano l'equilibrio tra forze esterne e forze interne agenti su un corpo elastico. Tale equilibrio può però risultare *instabile*.

Esempi di possibili instabilità sono

- Pilastrini soggetti a compressione (possibilità di inflessione laterale cioè sfiancamento, o di avviticciamento o di instabilità flesso-torsionale);
- Travi inflesse a sezione molto alta e stretta (possibilità di svergolamento laterale);
- Recipienti premuti dall'esterno (possibilità di imbozzamento verso l'interno); o anche, raccordi torici dei fondi dei recipienti premuti dall'interno;
- Lastre soggette a compressione nel proprio piano (possibilità di imbozzamenti).

Si richiamano le definizioni fondamentali:

- una configurazione di equilibrio di un sistema è *stabile* se un piccolo allontanamento da essa genera delle forze tendenti a riportare il sistema verso l'equilibrio;
- una configurazione di equilibrio di un sistema è *instabile* se un piccolo allontanamento da essa genera delle forze tendenti ad allontanare ulteriormente il sistema dall'equilibrio;
- una configurazione di equilibrio di un sistema è *indifferente* se un piccolo allontanamento da essa non genera delle forze aggiuntive, per cui anche la nuova configurazione è di equilibrio.

Dal punto di vista energetico:

- una configurazione di equilibrio di un sistema è *stabile* se un piccolo allontanamento da essa genera un aumento dell'energia totale del sistema;
- una configurazione di equilibrio di un sistema è *instabile* se un piccolo allontanamento da essa genera una diminuzione dell'energia totale del sistema;
- una configurazione di equilibrio di un sistema è *indifferente* se un piccolo allontanamento da essa non varia l'energia rispetto a quella iniziale.

Si sottolinea che tutte le considerazioni precedenti valgono per *piccoli* scostamenti da una configurazione iniziale di equilibrio. Si noti inoltre che le configurazioni "contigue" a quella di equilibrio indifferente risultano *anch'esse di equilibrio*, cosa che non avviene nel caso di equilibrio stabile o instabile.

6.1.2 UN SEMPLICE ESEMPIO

Come esempio iniziale, si consideri il caso di una barretta rigida, di lunghezza l , incernierata al piede e tenuta verticale dall'azione di una molla a spirale (fig. 6.1); in cima alla barretta, di massa trascurabile, vi sia una forza peso F . La retta di azione della forza peso passa per la cerniera, per cui la posizione verticale è di equilibrio.



Figura 6.1: Sistema ad un solo grado di libertà soggetto a carico di punta.

Se per azione di una forza esterna transitoria, di direzione orizzontale, la barretta viene mossa dalla posizione iniziale di equilibrio fino alla posizione 1, spostata da quella iniziale di un angolo θ , supposto piccolissimo, in direzione antioraria, nascono in generale dei nuovi momenti, per cui non è assicurata la conservazione dell'equilibrio. I momenti agenti sono quello antiorario della molla, tendente a riportare la barretta nella posizione iniziale, e quello antiorario della forza peso. Il momento agente sarà quindi

$$M = -k\theta + Fl \sin \theta$$

per cui il segno del momento dipende dal valore di F ; se F è piccolissima, M è negativo per θ positivo, per cui la tendenza del sistema è quella di ritornare alla posizione iniziale e quindi il sistema è stabile; se F è grandissima il comportamento è opposto, per cui il sistema è instabile; il caso limite tra i due è quello in cui

$$F = \frac{k}{l} \equiv F_{crit}.$$

La stessa cosa si può vedere con considerazioni energetiche; l'energia immagazzinata nella molla è

$$U = \frac{1}{2}k\theta^2,$$

mentre l'energia potenziale del peso è

$$W = -Fl(1 - \cos \theta),$$

nella quale è stata presa come quota di riferimento la quota del peso nella posizione di partenza. L'energia totale è quindi

$$E = \frac{1}{2}k\theta^2 - Fl(1 - \cos \theta)$$

che per angoli piccoli ($1 - \cos \theta \approx \theta^2/2$) diventa

$$E = \frac{1}{2}\theta^2(k - Fl)$$

per cui se F è piccola si ha una E positiva per ogni valore di θ , per cui l'equilibrio è stabile, se F è grande si ha una E negativa per ogni valore di θ , per cui l'equilibrio è instabile, mentre il caso limite (energia totale nulla) si ha per

$$F = \frac{k}{l} \equiv F_{crit}.$$

come nel caso precedente.

6.1.3 POSTULATO FONDAMENTALE

Lo studio del precedente esempio ci induce ad ammettere il seguente

Postulato

Se un sistema è soggetto a forze di compressione l'equilibrio risulta instabile per valori della forza di compressione al di sopra di quello a cui corrisponde l'equilibrio indifferente.

6.2 Metodi per lo studio della stabilità

Sono a disposizione due metodi:

- metodo statico
- metodo energetico.

6.2.1 METODO STATICO

1. Si sposta di pochissimo il corpo dalla condizione di equilibrio, purché la nuova configurazione sia compatibile con i vincoli.
2. Si impone che la nuova configurazione sia di equilibrio. Ciò equivale a dire che la configurazione di partenza era di equilibrio indifferente. L'equilibrio indifferente è il caso limite tra equilibrio stabile e instabile, per cui la forza esterna che rende indifferente l'equilibrio è quella critica. Valori inferiori della forza conducono infatti all'equilibrio stabile, mentre valori superiori portano all'equilibrio instabile.
3. Si scrive il bilancio dei momenti e si introduce nell'equazione differenziale della linea elastica.
4. Si risolve l'equazione differenziale e ci si accorge che le condizioni al contorno sono soddisfatte per un ben determinato valore (autovalore) della forza esterna, per il quale il corpo risulta in equilibrio indifferente; esso è il carico critico.

Primo esempio Si consideri una trave di lunghezza l , incastrata al piede e libera alla sommità, dove è caricata con una forza di compressione F (fig. 6.3). Si dia alla trave una configurazione deformata spostando lateralmente l'estremo libero.

Si supponga che la nuova configurazione sia di equilibrio. Ciò equivale a postulare che la configurazione iniziale fosse di equilibrio indifferente e quindi che la forza F sia proprio quella critica F_{cr} .

Si adotta il sistema di riferimento e la convenzione di positività dei momenti schematizzata in figura 6.2; come si vede, la convenzione classica che siano positivi i momenti che tendono le fibre inferiori si traduce nel fatto che all'estremo sinistro del concio di trave (cioè dal lato dell'origine) sia

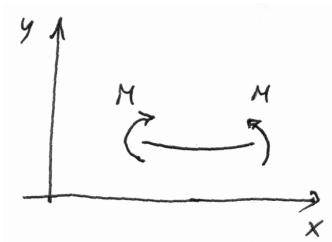


Figura 6.2: Sistema di riferimento adottato e convenzione positiva per i momenti.

positivo il momento *orario*. Inoltre, per il sistema di riferimento scelto, che vede l'asse y orientato nel verso opposto a quello usuale della Scienza delle Costruzioni, l'equazione della linea elastica è

$$y'' = \frac{M}{EI}, \quad (1)$$

in cui M è il momento flettente, e al secondo membro compare il segno $+$ anziché l'usuale segno $-$.

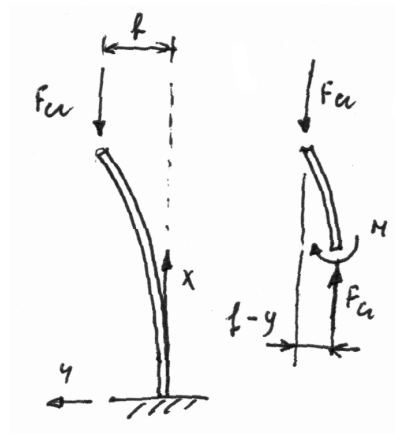


Figura 6.3: Pilastro soggetto a carico di punta (Column-Beam): caso dell'estremo superiore libero.

Dalla figura 6.3 si vede che $M = F_{cr}(f - y(x))$, quindi

$$y'' = \frac{F_{cr}(f - y)}{EI}$$

ossia

$$E I y'' + F_{cr}y = F_{cr}f$$

che si scrive

$$y'' + \frac{F_{cr}}{E I}y = \frac{F_{cr}}{E I}f$$

e, ponendo

$$\alpha^2 = \frac{F_{cr}}{E I}, \quad (2)$$

si ha

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 f.$$

Tale equazione differenziale, essendo *lineare*, ha per soluzione la somma di un integrale particolare della completa, p.e. $y = f$, e dell'integrale generale dell'omogenea associata¹ che è

$$y_0 = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x.$$

Perciò

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + f.$$

Per le condizioni al contorno deve essere $y = 0$ e $y' = 0$ per $x = 0$ e $y = f$ e $y'' = 0$ per $x = l$. Dalle prime due, relative all'estremo incastrato, si deduce che $C_1 = 0$ e $C_2 = -f$. Dall'altra si ottiene

$$\begin{aligned} \cos \alpha l &= 0 \\ \alpha &= \frac{\pi}{2l} \end{aligned}$$

per cui

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

Questa espressione è detta carico critico euleriano (per la trave considerata).

Notare che in questo esempio e nei successivi l'equazione si scrive sempre

$$y'' + \alpha^2 y = g(x)$$

in cui $g(x)$ è spesso costante (come in questo caso). Si nota che il segno del termine in y è sempre positivo, e questo vale come controllo.²

Secondo esempio Si consideri una trave di lunghezza l , incernierata al piede e appoggiata ad un carrello alla sommità, dove è caricata con una forza di compressione F (fig. 6.4). Si dia alla trave una configurazione deformata spostando lateralmente la parte centrale della trave (tanto per fissare le idee sia f la freccia massima al centro).

Si supponga che la nuova configurazione sia di equilibrio. Ciò equivale a postulare che la configurazione iniziale fosse di equilibrio indifferente e quindi che la forza F sia proprio quella critica F_{cr} .

Dalla figura 6.4 si vede che $M = -F_{cr}y(x)$, quindi

$$y'' = -\frac{F_{cr}y}{EI}$$

ossia

$$y'' + \frac{F_{cr}}{EI}y = 0$$

e, con la posizione (2) si ha

$$y'' + \alpha^2 y = 0.$$

Tale equazione differenziale ha per soluzione

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x.$$

Per le condizioni al contorno deve essere $y = 0$ per $x = 0$ e per $x = l$ e $y = f$ per $x = l/2$. Dalla prima si deduce che $C_1 = 0$, dalla seconda che $\alpha l = \pi$ e dall'ultima, si ottiene

$$C_2 \cos \alpha \frac{l}{2} = f,$$

¹l'equazione $y'' + \alpha^2 y = 0$ si integra con la posizione $y = e^{k\alpha x}$ che fornisce l'equazione caratteristica $k^2 + 1 = 0$ ossia $k = \pm i$

²In altri termini, si può far ricorso al principio fondamentale della matematica: *If you get the wrong sign, change it.*

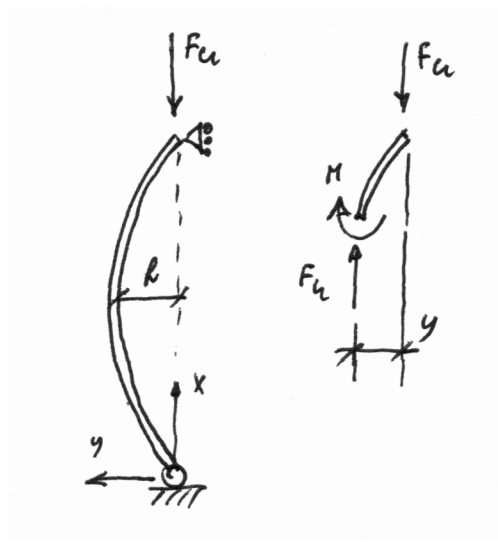


Figura 6.4: Pilastro soggetto a carico di punta (Column-Beam): caso delle due estremità appoggiate.

da cui

$$C_2 = f.$$

Dalla seconda condizione al contorno si ricava il valore di α e, sostituendo nella (2),

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

che è il carico critico euleriano in questo caso.

Terzo esempio Si consideri una trave di lunghezza l , incastrata al piede e appoggiata ad un carrello alla sommità, dove è caricata con una forza di compressione F (fig. 6.5). Si dia alla trave una configurazione deformata spostando lateralmente la parte centrale della trave.

Si supponga che la nuova configurazione sia di equilibrio. Ciò equivale a postulare che la configurazione iniziale fosse di equilibrio indifferente e quindi che la forza F sia proprio quella critica F_{cr} .

Dalla figura 6.5 a sinistra, anche se tracciata a sentimento, si vede che esiste un punto di flesso in B ; ivi il momento delle forze interne è nullo, per cui deve essere nullo anche il momento delle forze esterne, per cui la retta AB è la retta d'azione delle forze esterne, date dalla F_{cr} e dalla reazione Q del carrello A . Sostituendo il carrello con la sua reazione, si ottiene lo schema indicato nella figura 6.5 al centro.

Osservando la figura 6.5 a destra, in cui è indicato convenzionalmente il momento positivo, si vede che

$$-M - F_{cr}y + Q(l - x) = 0$$

ossia

$$M = -F_{cr}y + Q(l - x).$$

È chiaro che nel tratto AB prevale il primo addendo a secondo membro e nel tratto BC prevale il secondo, ma l'equazione rimane la stessa.

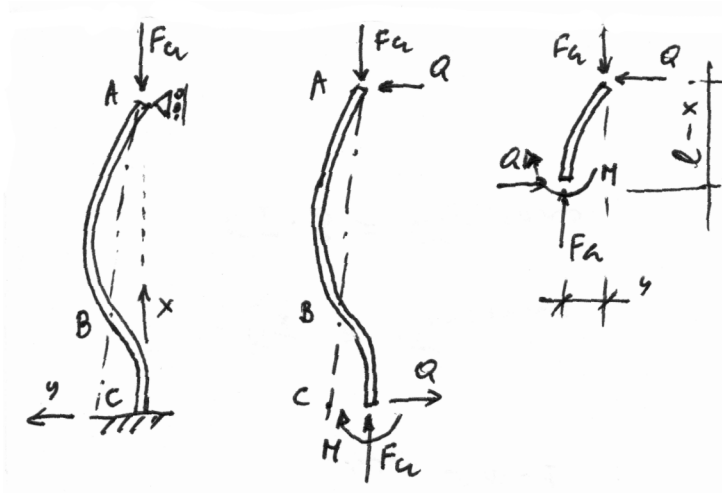


Figura 6.5: Pilastro soggetto a carico di punta (Column-Beam): una delle estremità incastrata e l'altra appoggiata.

Quindi, introducendo nella (1) si ha

$$y'' = -\frac{F_{cr}}{EI}y + \frac{Q}{EI}(l-x)$$

ovvero

$$y'' + \frac{F_{cr}}{EI}y = \frac{Q}{EI}(l-x)$$

e, con la solita posizione (2),

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 \frac{Q}{F_{cr}}(l-x).$$

La soluzione è data dalla somma della soluzione generale dell'omogenea associata, ben nota, e da un integrale particolare della completa; come integrale particolare si può scegliere $\bar{y} = k(l-x)$, con k costante da determinarsi, e non ci vuole molto per capire che è

$$\bar{y} = \frac{Q}{F_{cr}}(l-x).$$

(Notare che questa è l'equazione della retta di azione del risultante tra F_{cr} e Q .)

La soluzione generale è perciò

$$y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + \frac{Q}{F_{cr}}(l-x).$$

Per le condizioni al contorno deve essere $y = 0$ per $x = 0$ e per $x = l$ e $y' = 0$ per $x = 0$. Dalla prima si deduce che

$$C_1 = -\frac{Q}{F_{cr}}l,$$

dalla seconda che

$$C_1 \cos \alpha l + C_2 \sin \alpha l = 0 \tag{3}$$

e dalla terza che

$$\alpha C_2 = \frac{Q}{F_{cr}}.$$

Sostituendo i valori di C_1 e C_2 nella (3) si ha

$$-\frac{Q}{F_{cr}}l \cos \alpha l + \frac{1}{\alpha} \frac{Q}{F_{cr}} \sin \alpha l = 0$$

cioè

$$\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l = 0$$

e infine

$$\alpha l = \tan \alpha l$$

che si risolve per via numerica o grafica e la cui soluzione più piccola, a parte quella banale $\alpha = 0$, è $\alpha l = 4.493$.

Sostituendo nell'espressione di α^2 si ha:

$$F_{cr} = \frac{4.493^2 EI}{l^2}$$

e, volendo, per uniformità con i casi precedenti, far comparire al numeratore il π^2 , si ottiene

$$F_{cr} = \frac{4.493^2 \pi^2 EI}{\pi^2 l^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2 \pi^2 / 4.493^2}$$

per cui il coefficiente di l che compare al denominatore è $\pi/4.493 = 0.699$

Questo esempio è stato introdotto al solo scopo di evidenziare che nel caso della trave appoggiata-appoggiata (secondo esempio) i carrelli non reagiscono, e ciò si vede per il fatto che la retta che congiunge i due punti di flesso è verticale (passa per i due appoggi) anziché inclinata.

Si noti tuttavia che questa trattazione non permette di trovare il valore della reazione del carrello nel caso qui esposto.

Quarto esempio Si consideri una trave di lunghezza l , incastrata al piede e appoggiata ad un doppio pendolo alla sommità, dove è caricata con una forza di compressione F (fig. 6.6). Si dia alla trave una configurazione deformata spostando lateralmente la parte centrale della trave.

Il doppio pendolo reagisce in generale con un momento M_0 , qui raffigurato positivo, ma non c'è una forza vincolare in quanto la congiungente dei due punti di flesso è verticale.

Il momento M all'ascissa x (vedi la figura 6.6, a destra) si ricava dall'equilibrio

$$-M - F_{cr}y + M_0 = 0$$

e quindi vale

$$M = -F_{cr}y + M_0$$

e, sostituendo nella (1)

$$y'' = -\frac{F_{cr}}{EI}y + \frac{M_0}{EI}$$

cioè

$$y'' + \frac{F_{cr}}{EI}y = \frac{M_0}{EI}$$

e ancora, con la solita posizione (2),

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 \frac{M_0}{F_{cr}}$$

La soluzione è data dalla somma della soluzione generale dell'omogenea associata, ben nota, e da un integrale particolare della completa; come integrale particolare si può scegliere

$$\bar{y} = \frac{M_0}{F_{cr}}.$$

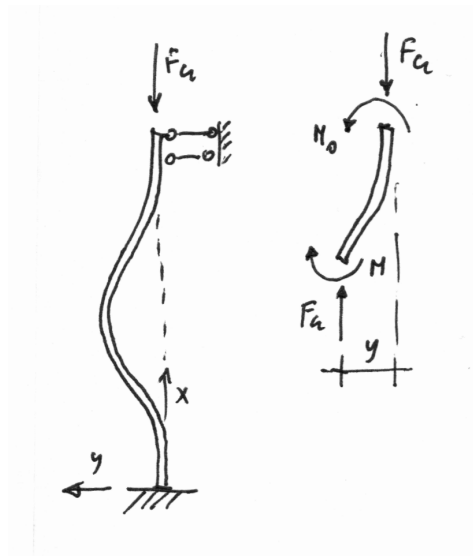


Figura 6.6: Pilastro soggetto a carico di punta (Column-Beam): una delle estremità incastrata e l'altra vincolata con doppio pendolo.

(Notare che questa è l'equazione della congiungente i due punti di flesso della deformata.)

La soluzione generale è perciò

$$y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + \frac{M_0}{F_{cr}}.$$

Per le condizioni al contorno deve essere $y = 0$ per $x = 0$ e per $x = l$ e $y' = 0$ per $x = 0$. Dalla prima si deduce che

$$C_1 = -\frac{M_0}{F_{cr}},$$

dalla terza che

$$C_2 = 0,$$

e dalla seconda che

$$C_1 \cos \alpha l + \frac{M_0}{F_{cr}} = 0. \quad (3')$$

Sostituendo i valori di C_1 e C_2 nella (3') si ha

$$-\frac{M_0}{F_{cr}} \cos \alpha l + \frac{M_0}{F_{cr}} = 0$$

cioè

$$\cos \alpha l = 1$$

e ancora

$$\alpha l = 2\pi$$

e infine

$$\alpha^2 l = \frac{4\pi^2}{l^2}$$

Sostituendo nell'espressione di α^2 si ha:

$$F_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}.$$

6.2.2 METODO ENERGETICO

Quando il corpo si sposta dalla condizione di equilibrio si verifica una variazione, che di solito è un aumento, dell'energia di deformazione elastica e una variazione, che di solito è una diminuzione, dell'energia potenziale di posizione delle forze esterne.

L'equilibrio risulta stabile, instabile o indifferente secondo che l'energia totale è aumentata, diminuita o invariata.

Infatti se il sistema corpo deformato + forze esterne viene spostato di poco dalla configurazione di equilibrio (per esempio per l'urto accidentale di un corpo esterno) e nella nuova configurazione possiede un'energia maggiore, tende a liberarsi di questa energia tornando alla posizione iniziale, per cui in essa l'equilibrio è stabile; se invece possiede nella nuova configurazione un'energia minore tende ad allontanarsi ancora di più dalla configurazione di equilibrio per cui questa risulta instabile.

Per bassi valori delle forze esterne, la diminuzione della loro energia di posizione non basta a compensare l'aumento di energia interna, dovuta alla deformazione imposta, per cui l'equilibrio risulta stabile; Per alti valori delle forze esterne la diminuzione della loro energia potenziale è più che sufficiente a compensare l'aumento dell'energia di deformazione, per cui l'energia totale del sistema diminuisce e quindi vi è un "surplus" di energia liberata che può servire a deformare ulteriormente il corpo, allontanandolo così dall'equilibrio, che perciò risulta instabile.

Il caso dell'equilibrio indifferente è quello che costituisce il confine tra i due casi, per cui la forza esterna corrispondente è proprio quella critica.

Riprendendo l'esempio della trave a mensola soggetta a carico di punta, si ha che l'energia elastica dU immagazzinata in un concio di lunghezza dx , uguale al lavoro delle forze interne, vale

$$dU = \frac{1}{2} M \frac{M}{EI} dx,$$

quindi, per l'intera trave,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx.$$

Questo integrale può essere riscritto in due modi. Ricordando che

$$\frac{M}{EI} = y''$$

esso vale

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^l (y'')^2 dx \quad (1)$$

mentre, scrivendo

$$M = F(f - y)$$

vale

$$U = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EI} \int_0^l (f - y)^2 dx. \quad (2)$$

Il lavoro della forza esterna F è dato dal prodotto della forza per dallo spostamento del suo punto di applicazione nella direzione della forza. Lo spostamento detto è dovuto alla rotazione del concio, che rimane non più verticale pur rimanendo della stessa lunghezza (essa è minore della lunghezza a riposo dell'aliquota dovuta alla compressione, che è identica sia che la trave rimanga verticale sia che si deformi). Per un concio dx (fig. 6.7), inclinato di θ rispetto alla condizione indeformata (verticale), la variazione di altezza vale

$$d\delta = (1 - \cos \theta) dx = \frac{\theta^2}{2} dx = \frac{(y')^2}{2} dx$$

e, per tutta la trave

$$\delta = \int_0^l \frac{(y')^2}{2} dx.$$

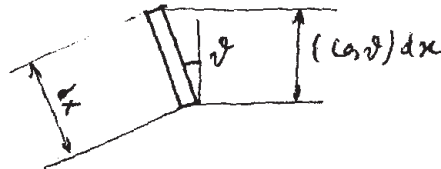


Figura 6.7: Rotazione di un conico nel pilastro soggetto a carico di punta

Il lavoro della forza esterna è perciò

$$W = F \int_0^l \frac{(y')^2}{2} dx.$$

Se i due lavori sono uguali significa che siamo in condizioni di equilibrio indifferente e quindi la forza esterna è quella critica.

Perciò, se l'energia interna è scritta nella forma (1) si ha

$$F_{cr} = \frac{EI \int_0^l (y'')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx} \quad (3)$$

ovvero, se l'energia interna è scritta nella forma (2)

$$F_{cr} = EI \frac{\int_0^l (y')^2 dx}{\int_0^l (f - y)^2 dx} \quad (4)$$

Queste formule sono esatte solo se la $y(x)$ è la deformata effettiva. Tuttavia si dimostra che il funzionale F_{cr} è minimo quando la $y(x)$ è quella effettiva; per cui se si dà ad $y(x)$ una forma simile a quella effettiva si ottiene una F_{cr} senz'altro maggiore di quella vera ma non molto discosta da essa.

L'esperienza dimostra che in questo caso la (4) è più accurata della (3).

Per esempio, la trave-colonna incastrata alla base e libera in sommità, già vista nell'applicazione del metodo statico, ha una deformata sinusoidale ossia

$$y = f \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$$

Sostituendo questa espressione nelle (3) e (4) si ottiene in entrambi i casi

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

che è ovviamente lo stesso risultato ottenuto col metodo statico. Se invece si ipotizza una deformata parabolica $y = cx^2$, che all'estremo libero diventa $f = cl^2$ da cui si ricava c , per cui in definitiva

$$y = \frac{f}{l^2}x^2$$

si ottiene, sostituendo nella (3)

$$F_{cr} = 3\frac{EI}{l^2}$$

con un errore del 21.6 per cento e, sostituendo nella (4)

$$F_{cr} = 2.5\frac{EI}{l^2}$$

con un errore di 1.32 per cento.

Se si ipotizza una deformata di terzo grado

$$y = \frac{f}{2l^3}(3lx^2 - x^3)$$

e si sostituisce nella (3) si ha

$$F_{cr} = 2.5\frac{EI}{l^2}$$

con un errore di 1.32 per cento. Per i tre casi precedenti si veda Belluzzi, vol 4 pag 36-37, mentre il caso della deformata cubica sostituita nella (4) viene lasciata allo studioso lettore³.

³la soluzione è

$$F_{cr} = 2.470588\frac{EI}{l^2}$$

con un errore di 0.129 per cento

6.3 Applicazioni

6.3.1 TRAVI SNELLE CARICATE DI PUNTA

Se la trave è sufficientemente lunga e sottile (questa nozione sarà chiarita nel paragrafo seguente) il carico critico è

$$F_{cr} = C \frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

dove I è il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse lungo il quale si prevede avvenga l'inflessione (tranne casi particolari di vincolo si prende il valore minimo di I).

con

$$C = \begin{cases} 1/4 & \text{per trave incastrata a un estremo e libera all'altro} \\ 1 & \text{per trave incernierata - incernierata} \\ 4 & \text{per trave incastrata - incastrata} \\ \approx 2 & \text{per trave incernierata - incastrata} \end{cases}$$

In caso di incertezza è bene prendere C il più piccolo possibile, e comunque di non salire al disopra di $C = 1$.

In alternativa all'approccio precedente si può definire una *lunghezza libera di inflessione* l_0 , cioè la distanza tra due punti di flesso della deformata, la quale, nella notazione precedente è

$$l_0 = l/\sqrt{C}$$

e riscrivere la tabella precedente in questo modo:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2}$$

$$l_0 = \begin{cases} 2l & \text{per trave incastrata a un estremo e libera all'altro} \\ l & \text{per trave incernierata - incernierata} \\ l/2 & \text{per trave incastrata da un lato e con doppio pendolo dall'altro} \\ l/2 & \text{per trave incastrata - incastrata} \\ \approx 0.7l & \text{per trave incernierata - incastrata.} \end{cases}$$

Inoltre, se la trave è incernierata ad entrambe le estremità ed ha n appoggi intermedi equidistanti, la lunghezza libera è $l_0 = l/n$.

Secondo L. F. Donato, *Lezioni di Scienza delle Costruzioni*, Cursi, Pisa, quinta edizione, 1968, nei casi di trave incastrata - incernierata e incastrata - incastrata è opportuno non fidarsi troppo della saldezza dei vincoli e prendere rispettivamente $l_0 = 0.8l$ (invece di $l_0 = 0.7l$) e $l_0 = 0.75l$ (invece di $l_0 = 0.5l$).

6.3.2 TRAVI TOZZE CARICATE DI PUNTA

Per travi tozze, ossia travi che hanno bassa snellezza, il carico critico euleriano tende all'infinito; tuttavia è evidente che in questo caso il collasso avviene per un meccanismo diverso, ossia per schiacciamento, ossia per il raggiungimento del carico di rottura a compressione. Per travi tozze di deve quindi porre un diverso valore della forza massima che provoca il collasso, ossia il prodotto dell'area per la tensione di rottura a compressione σ_{-R} .

Il valore della snellezza per i quali le due forze limite si eguagliano può essere presa come confine fra travi tozze e snelle. Tale snellezza limite λ_{lim} si ottiene dall'equazione

$$\frac{\pi^2 E A}{\lambda_{lim}^2} = \sigma_{-R} A$$

e quindi vale

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{-R}}}$$

In realtà la schematizzazione adottata è troppo rozza, per cui nella zona di transizione fra travi tozze e snelle il carico assiale limite è definito da formule empiriche, come la seguente di J.B. Johnson:⁴

$$F_{cr} = \sigma_y A \left(1 - \frac{\sigma_y}{4} \cdot \frac{(l/\rho)^2}{C\pi^2 E} \right)$$

con ρ raggio d'inerzia minimo della sezione. Questa formula è valida per valori di l/ρ minori di

$$(l/\rho)_{lim} = \sqrt{\frac{2\pi^2 C E}{\sigma_y}} \quad (5)$$

Al di sopra si deve usare la formula di Eulero.

La parabola di Johnson può essere vista come un puro trucco matematico per interpolare tra l'iperbole di Eulero e la tensione di snervamento. Si ponga:

$$\frac{l^2}{C\pi^2 E \rho^2} = \frac{l_0^2}{\pi^2 E \rho^2} \equiv \Lambda$$

in modo da poter scrivere

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{1}{\Lambda},$$

che, nel piano σ - Λ rappresenta una iperbole, e si trovi una retta tangente a tale iperbole e che passi per il punto $(0, \sigma_y)$. Chiamando, per semplificare, x e y le coordinate, la retta è della forma

$$y = \sigma_y - ax$$

con a da determinare, e la richiesta è che l'intersezione tra retta e iperbole sia un punto doppio, cioè che sia nullo il discriminante dell'equazione

$$\sigma_y - ax = \frac{1}{x},$$

che si riscrive

$$ax^2 - \sigma_y x + 1 = 0$$

e il suo discriminante è

$$\sigma_y^2 - 4a = 0,$$

da cui

$$a = \frac{\sigma_y^2}{4},$$

⁴risalente all'inizio del XX secolo.

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{\sigma_y^2}{4} \Lambda,$$

e, tornando alle unità fisiche, si ritrova l'equazione della parabola di Johnson.

La stessa parabola si ritrova, in base a considerazioni più fisiche, considerando che, a valori vicini allo snervamento, la sezione, compressa e inflessa, comincia a snervarsi in corrispondenza delle fibre più compresse, in modo che l'ulteriore deformazione avviene, nel piano σ - ϵ secondo una direzione più vicina all'orizzontale (il cosiddetto modulo tangente), per cui il punto rappresentativo sul piano σ - λ risulta più basso di quanto previsto dalla iperbole di Eulero. Rendendo quantitative queste considerazioni si arriva alla parabola di Johnson o anche, in base alle ipotesi concretamente fatte, ad altre curve che hanno tutte lo stesso andamento qualitativo.⁵

Tanto per fissare le idee, vecchie norme (DIN 1050, edizione 1943) consideravano la tensione limite pari a 235 MPa per acciaio ordinario (Fe 360) se la snellezza era minore di 60, e uguale a quella di Eulero ($\sigma_{cr}/\text{MPa} = (2.03 \times 10^6/\lambda^2)$) per $\lambda \geq 100$, mentre interpolavano linearmente tra i due casi, con la formula $\sigma_{cr}/\text{MPa} = 284 - 0.802\lambda$ per i casi intermedi. Ciò viene citato per affermare che per snellezze minore di 50 conviene non tener conto in prima approssimazione della instabilità.

6.3.3 METODO OMEGA

Per spiegare il metodo omega si può, con l'aiuto della fig. 6.8, definire il grado di sicurezza per travi tozze e per travi snelle.

Per travi tozze sarà

$$s = \frac{\overline{O_1 B_1}}{\overline{O_1 P_1}}$$

che corrisponde alla ben nota

$$s = \frac{\sigma_{-R}}{N/A}$$

in cui N è lo sforzo normale e A l'area della sezione resistente; per travi snelle, invece

$$s = \frac{\overline{O_2 B_2}}{\overline{O_2 P_2}}$$

⁵Un approccio diverso, desunto dagli appunti di *Strutture Off-Shore*, dalle lezioni di Antonio Campanile, prevede che nell'asta vi siano delle tensioni residue di compressione, tali da provocare l'inizio dello snervamento ben prima che la tensione nominale raggiunga la σ_y . Se infatti è presente una tensione di compressione residua pari a σ_r , la plasticizzazione inizia quando la tensione nominale raggiunge quella che è chiamata la *tensione di proporzionalità strutturale*

$$\sigma_{ps} = \sigma_y - \sigma_r.$$

Da questo punto in poi la derivata della curva σ - ϵ è minore di E ed è data dal cosiddetto modulo tangente E_{ts} , dato sperimentalmente dalla formula di Oostenfeld-Bleich:

$$\frac{E_{ts}}{E} = \frac{\sigma_s(\sigma_y - \sigma_s)}{\sigma_{ps}(\sigma_y - \sigma_{ps})},$$

in cui $\sigma_s = P/A$. Corrispondentemente, nella formula del carico critico, occorre sostituire la E con la E_{ts} , e la formula diventa, scritta in termini di tensione

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} = \frac{1}{\Lambda} \frac{\sigma_s(\sigma_y - \sigma_s)}{\sigma_{ps}(\sigma_y - \sigma_{ps})}.$$

Ponendo in essa $\sigma_s = \sigma_{cr}$ si ottiene un'equazione di primo grado in σ_{cr} che, risolta, porge

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} = 1 - \frac{\sigma_{ps}}{\sigma_y} \left(1 - \frac{\sigma_{ps}}{\sigma_y} \right) \Lambda,$$

che, per $\sigma_{ps}/\sigma_y = 1/2$ restituisce la formula di Johnson (che, nel piano σ_{cr} - Λ è rappresentata da una retta) e, per $\sigma_{ps}/\sigma_y = 1$ restituisce la retta orizzontale passante per σ_y . Che poi 1/2 e 1 siano effettivamente i valori estremi per σ_{ps}/σ_y è chiaro dal fatto che σ_{ps} non può superare σ_y , valore limite per tutte le tensioni, e che al di sotto del valore 1/2 la retta che rappresenta la σ_{cr}/σ_y non interseca più l'iperbole di Eulero, ma ne rimane sempre al di sotto.

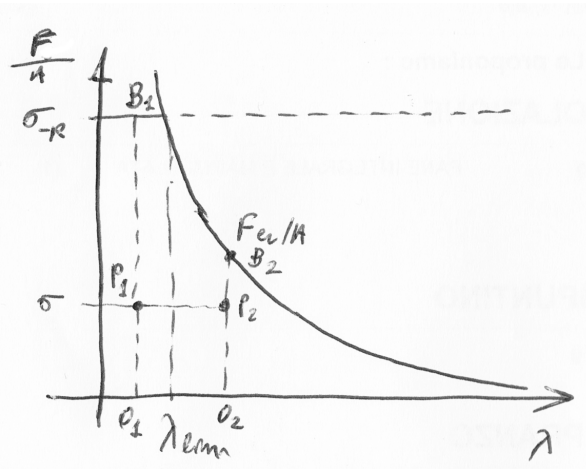


Figura 6.8: Definizione del grado di sicurezza per travi tozze e travi snelle.

ossia

$$s = \frac{F_{cr}}{N} = \frac{\pi^2 E A \rho^2 / l_0^2}{N} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 (N/A)}$$

Si adottano ora due artifici semplicissimi, ma di non evidente utilità, e perciò *difficili* da memorizzare, ossia si moltiplica numeratore e denominatore per σ_{-R} , ottenendosi

$$s = \frac{\sigma_{-R}}{N/A} \cdot \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 \sigma_{-R}}$$

e poi si indica la seconda delle due frazioni a secondo membro con la notazione $1/\omega$, per cui si ha

$$s = \frac{\sigma_{-R}}{\omega N/A}$$

Il significato di questa espressione è che, nel caso più generale di carico di punta si scrive la stessa espressione adottata nel caso di travi tozze, ma moltiplicando lo sforzo normale per un coefficiente maggiorativo ω , che è funzione della snellezza e che viene posto uguale ad 1 per travi tozze.

Naturalmente conviene riordinare la precedente espressione scrivendo

$$\frac{\omega N}{A} = \frac{\sigma_{-R}}{s} = \sigma_{amm}$$

in cui si ritrova la classica formula di verifica per lo sforzo normale, in cui però lo sforzo effettivo agente N deve essere moltiplicato per il coefficiente maggiorativo ω .

Poiché l'andamento della curva limite è più complesso di quanto mostrato in fig. 6.8, i valori di ω si prendono da tabelle della normativa.

Ribadendo sempre che l'unica normativa giuridicamente valida è data dalla sua ultima edizione, riporto un estratto da due tabelle, uno dal Santarella, *Manuale del Cemento Armato* (gli stessi dati stanno sul Colombo. *Manuale dell'Ingegnere*, 80.a edizione), e l'altro dal *Manuale dell'Ingegnere Meccanico*, solo per dare un'idea degli ordini di grandezza. La prima, per pilastri in C.A., fornisce:

λ	ω	λ	ω
≤ 50	1.00	90	1.42
60	1.04	100	1.62
70	1.08	110	1.91
80	1.24	120	2.28