

## 5. Effetto d'intaglio

“Intaglio: nelle costruzioni meccaniche, soluzione di continuità, feritoia di piccole dimensioni o anche brusca variazione di sezione di un pezzo meccanico” (La Piccola Treccani, 1995).

### 5.1 Introduzione

La distribuzione delle tensioni in prossimità di un intaglio è notevolmente diversa da quella teorica del de Saint Venant. In particolare, nella zona di gola dell'intaglio si hanno punte di tensione notevolmente elevate. Il massimo valore di tale tensione,  $\sigma_{max}$ , è particolarmente importante nello studio della resistenza a fatica.

In questo capitolo l'effetto d'intaglio sarà studiato con riferimento ad un materiale idealmente elastico, ossia con comportamento sempre lineare (addirittura non passibile di rottura, quindi assoggettabile a carichi grandi quanto si voglia).

Si definisce *coefficiente teorico di intaglio*  $K_t$  il rapporto

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$

dove  $\sigma_n$  è una opportuna tensione di riferimento. Per il caso di sforzo normale in pezzi prismatici si pone quasi sempre

$$\sigma_n = \frac{N}{A_{min}}$$

dove  $A_{min}$  è quella al netto dell'intaglio, ossia la sezione più ristretta.

I valori di  $K_t$ , per moltissimi casi di impiego pratico, si rilevano dalla letteratura, in particolare da Peterson (1973).

Essi sono stati ottenuti raramente per via analitica, alcune volte per via numerica (elementi finiti) e il più delle volte per via sperimentale (estensimetrica o fotoelastica).

Tra le soluzioni analitiche vi sono:

1. Quella del Kirsch del foro circolare in una piastra di larghezza infinita in sforzo normale:

$$K_t = 3$$

2. Quella di Kolosov (1909) ed Inglis (1913) del foro ellittico in piastra di larghezza infinita in sforzo normale:

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{r}} = 1 + 2\frac{a}{b} \quad (1)$$

dove (fig 5.1)  $a$  è il semiasse perpendicolare al carico,  $b$  è il semiasse parallelo al carico (notare l'uso non standard di questi simboli) e  $r = b^2/a$  è il raggio di gola dell'intaglio.

3. Quella di Neuber per due intagli iperbolici laterali ad una piastra infinita in trazione e flessione e ad un solido di rivoluzione in trazione, flessione e torsione.

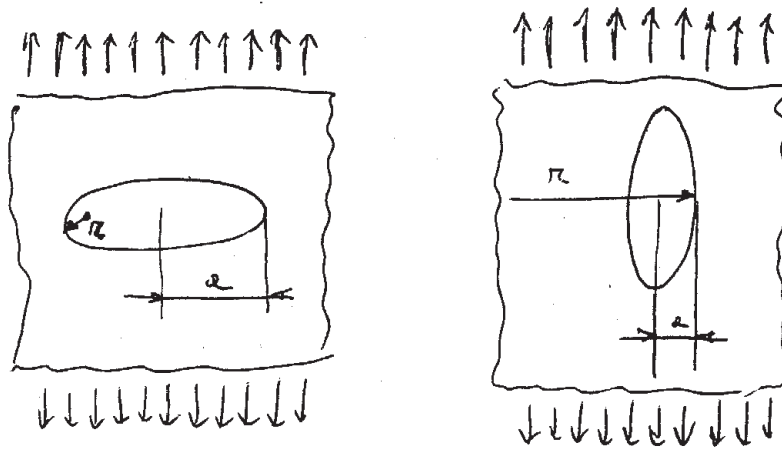


Figura 5.1: Definizioni geometriche dell'intaglio ellittico

## 5.2 Analogia idrodinamica

Prima di riportare alcune soluzioni analitiche, numeriche o sperimentali del problema dell'effetto di intaglio presenterò un metodo intuitivo che in molti casi può aiutare a determinare i punti più soggetti ad intaglio o addirittura a ridurre l'incidenza tramite opportune modifiche della forma del pezzo (in altri casi, pochi per fortuna, questo metodo può condurre anche a risultati grossolanamente errati, per cui va usato sempre con cautela).

Il metodo è quello dell'analogia idrodinamica (figg. 5.2 e 5.3).

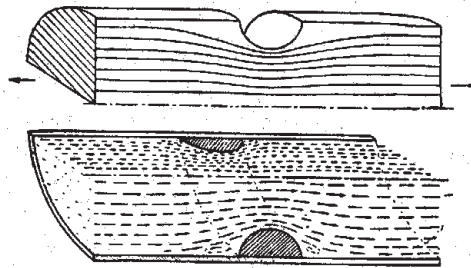


Figura 5.2: Analogia idrodinamica in un'asta con gola torica

Si supponga che il pezzo sia sostituito da un tubo avente la sua stessa sezione trasversale, ed in questo sia fatto scorrere un fluido pochissimo viscoso, tanto che la sua velocità sia sensibilmente uniforme in tutti i punti della sezione purché lontani da singolarità.

Allora, le linee di flusso del fluido si addenseranno in corrispondenza di spigoli rientranti e si diraderanno in corrispondenza di spigoli sporgenti, con rispettivo aumento o diminuzione della velocità del fluido; l'analogia fa corrispondere alla velocità del fluido punto per punto la tensione elastica nel punto corrispondente; perciò dove si hanno aumenti della velocità ci saranno aumenti di tensione.

L'analogia idrodinamica aiuta a discutere il caso degli intagli in serie e in parallelo: due intagli

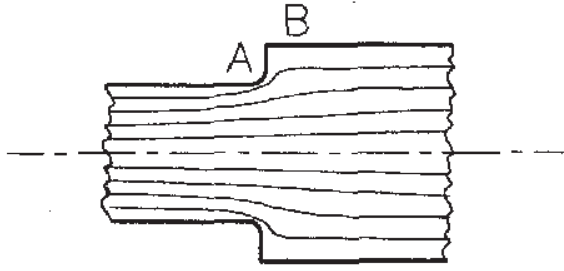


Figura 5.3: Analogia idrodinamica in una lastra con raccordo tra due larghezze (o in un'asta con spallamento)

si dicono in serie se il flusso di tensione li investe l'uno dopo l'altro, sono in parallelo se li investe contemporaneamente.

Ovviamente nel caso degli intagli in parallelo si ha un 'doppio' restringimento della sezione con temuto aumento dell'effetto d'intaglio rispetto a quello dell'intaglio singolo. Invece nel caso degli intagli in serie uno dei due intagli funge da protezione per l'altro, per cui il coefficiente d'intaglio complessivo può essere minore di quello dei due singoli intagli se fossero isolati.

Tale fatto conduce all'introduzione degli intagli di scarico.

### 5.3 Soluzione del Neuber

(formule tratte dal Manna)

1) Piastra infinita con due intagli iperbolici di profondità infinita;  $t$  è la semilarghezza della piastra nel punto più stretto,  $r$  è il raggio di curvatura in gola;  $\delta = t/r$  (fig 5.4); caso della trazione.

$$K_t = \frac{2(1 + \delta)\sqrt{\delta}}{(1 + \delta)\operatorname{arctg}\sqrt{\delta} + \sqrt{\delta}}$$

2) Piastra infinita come sopra, in flessione nel proprio piano.

$$K_t = \frac{4\delta\sqrt{\delta}}{3[\sqrt{\delta} - (1 - \delta)\operatorname{arctg}\sqrt{\delta}]}$$

3) Solido di rotazione infinito con scanalatura circonferenziale a sezione iperbolica (ottenibile dalla rotazione della piastra dei casi 1 e 2).  $r_e$  è il raggio della sezione di gola,  $r$  è il raggio del meridiano nella sezione ristretta;  $\delta = r_e/r$ ;  $\nu$  è il modulo di Poisson;  $\sigma_m$  e  $\sigma_t$  sono la tensione meridiana e circonferenziale rispettivamente. Caso della trazione.

$$\frac{\sigma_{m,max}}{\sigma_n} = \frac{1}{A}(1 + \nu + B\sqrt{1 + \delta})$$

$$\frac{\sigma_{t,max}}{\sigma_n} = \frac{\delta}{A}\left(\frac{1}{2} + \nu\sqrt{1 + \delta}\right)$$

dove

$$A = \delta + 2(1 + \nu\sqrt{1 + \delta})$$

$$B = \frac{3}{2} + 2\nu + \delta$$

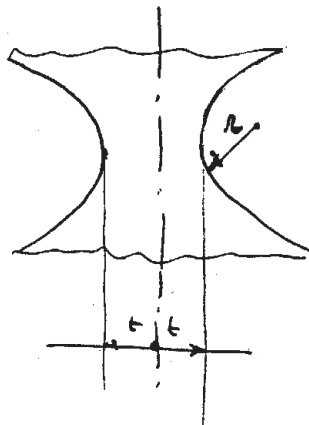


Figura 5.4: Geometria dell'intaglio iperbolico

4) Solido del caso precedente, in flessione.

$$\frac{\sigma_{m,max}}{\sigma_n} = \frac{3}{4A}(B + C\sqrt{1 + \delta})$$

$$\frac{\sigma_{t,max}}{\sigma_n} = \frac{3\delta}{4A}(1 + \nu + 3\nu\sqrt{1 + \delta})$$

dove

$$A = \frac{(1 + \nu)(5 + 4\delta) + [4(1 + \nu) + 3\delta]\sqrt{1 + \delta}}{1 + \sqrt{1 + \delta}}$$

$$B = (1 + \nu)(3 + 2\delta)$$

$$C = 3(1 + \nu + \delta)$$

5) solido dei casi precedenti, in torsione.

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_n} = \frac{3(1 + \sqrt{1 + \delta})^2}{4(1 + 2\sqrt{1 + \delta})}$$

## 5.4 Foro circolare in lastra di larghezza finita, in trazione

E' stato studiato da Howland, i cui risultati sono riportati in fig. 5.5. Se il raggio del foro è molto minore della larghezza della piastra vale la soluzione per piastra di larghezza infinita ( $K_t = 3$ ) purchè come tensione nominale si scelga quella a grande distanza a monte o a valle del foro, ottenuta dividendo la forza agente per la sezione lorda; il relativo valore del fattore d'intaglio è chiamato  $K_{tg}$  in figura. Se il coefficiente di intaglio è definito in base alla tensione nella sezione ristretta ( $K_{tn}$  in figura) si ha

$$K_{tn} = K_{tg} \frac{w - a}{w}$$

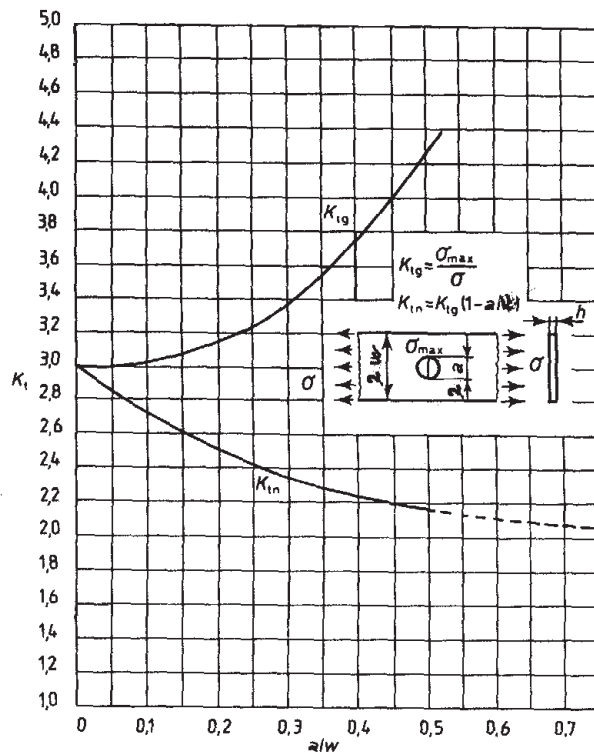


Figura 5.5: Coefficiente teorico di intaglio  $K_t$  per una lastra di larghezza  $2w$  con foro di diametro  $2a$ , sottoposta a trazione: caso di  $a/w < 0.5$

Per il caso limite  $a = w$  molti autori trovano  $K_{tn} = 2$ . La curva inferiore di fig. 5.5 è approssimata da Heywood con la formula

$$K_{tn} = 2 + \left(1 - \frac{a}{w}\right)^3$$

che è in buon accordo coi risultati di Howland per  $a/w < 0,3$  ed è solo dell' 1,5 per cento più bassa per  $a/w = 0,5$  (dà  $K_t = 2.125$  invece che  $K_t = 2.16$ ).

Per valori di  $a/w > 0.4$  vale la trattazione di Van Riesen e Spiering (fig. 5.6).

### 5.5 Piastra di larghezza finita con intagli laterali semicircolari, in trazione

Nel caso delle piastre con foro o con intaglio si usano due forme del fattore d'intaglio: 1)  $K_{tn}$ , che riferisce la tensione nominale all'area ristretta 2)  $K_{tg}$ , che riferisce la tensione nominale all'area lorda. La prima corrisponde alla definizione generale di effetto di intaglio, ma la seconda è più usata nelle trattazioni teoriche, perché conduce a sviluppi più semplici. Se si hanno intagli laterali semicircolari (fig. 5.7) la cui profondità è trascurabile rispetto alla larghezza della sezione ristretta si può usare, guidati dall'analogia idrodinamica, la formula del foro circolare prendendo  $K_{tg} = 3$ . Questa comunque è un'approssimazione, visto che molti autori trovano  $K_{tg} = 3.065$ . La discrepanza col caso del foro circolare si accentua al crescere di  $a/w$ ; in particolare, per  $a/w = 1$

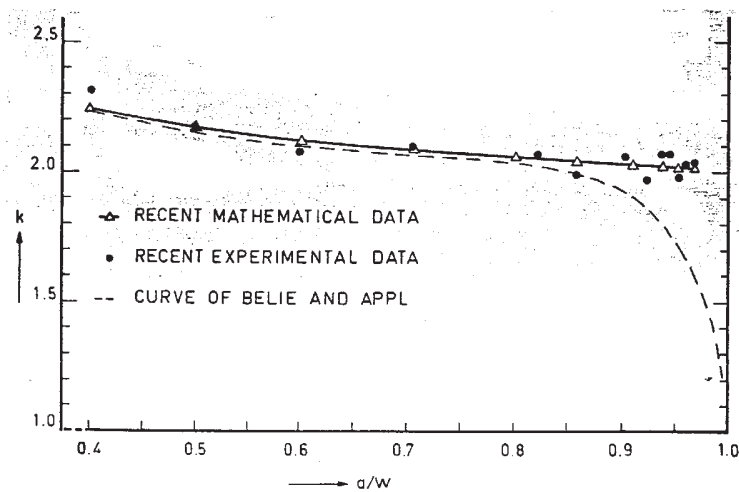


Figura 5.6: Coefficiente teorico di intaglio  $K_t$  per una lastra di larghezza  $2w$  con foro di diametro  $2a$ , sottoposta a trazione: caso di  $a/w > 0.4$

si ha  $K_{tn} = 1$ , perché in questo caso mancano effetti di flessione. Per il resto si può guardare al paragrafo seguente, particolarizzandone le formule al caso circolare.

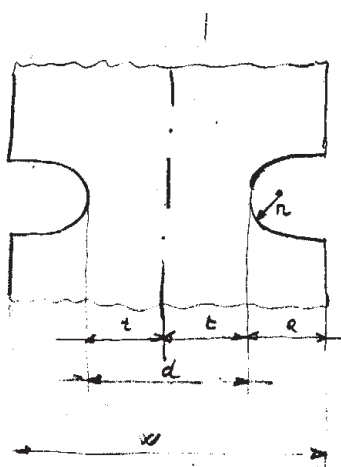


Figura 5.7: Geometria degli intagli laterali semicircolari

## 5.6 Piastra di larghezza finita con intagli laterali generici, in trazione

Nel caso della piastra tesa con due intagli laterali simmetrici ad U o a V, si può usare approssimativamente la soluzione per il foro ellittico avente lo stesso rapporto  $a/r$ , quindi

$$K_{tn} = \left(1 - \frac{a}{w}\right) \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{r}}\right)$$

Questa formula vale comunque solo per piccoli valori di  $a/w$ . Per alti valori di questo rapporto vale la soluzione di Neuber con lo stesso valore di  $r/t$ , dove  $t$  è la semilarghezza nella sezione ristretta.

Per valori intermedi del rapporto  $a/w$  si calcolano il  $K_{th}$  relativo al caso iperbolico con lo stesso valore di  $r/d$  e il  $K_{te}$  relativo al caso ellittico con lo stesso valore di  $a/r$  e poi si ottiene un valore approssimato di  $K_t$  con la formula di interpolazione (anch'essa dovuta a Neuber)

$$K_t = 1 + \sqrt{\frac{(K_{th} - 1)^2(K_{te} - 1)^2}{(K_{th} - 1)^2 + (K_{te} - 1)^2}}$$

I dati risultanti dalla formula sono alquanto minori del vero; sono riportati nella tabella allegata insieme ai valori di altre formule di interpolazione.

Un'altra formula è quella di Heywood

$$K_{tn} = 1 + \left[ \frac{t/r}{1.55(w/d) - 1.3} \right]^n$$

dove

$$n = \frac{w/d - 1 + 0.5\sqrt{a/r}}{w/d - 1 + \sqrt{a/r}}$$

dove  $d = 2t$  è la larghezza della zona ristretta.

Nella presentazione dei dati conviene riportare  $K_t$  in ordinate e  $\sqrt{a/r}$  in ascisse. Questa rappresentazione ha il vantaggio che per valori grandi delle ascisse le linee del diagramma tendono a rette la cui pendenza è

$$\lim_{\sqrt{a/r} \rightarrow \infty} \frac{dK_t}{d\sqrt{a/r}} = \frac{2K_I}{\sigma_n \sqrt{\pi a}}$$

in cui  $K_I$  è il fattore di intensità delle tensioni e  $\sigma_n$  è la tensione sulla sezione netta.

Questa preziosa formula consente di sfruttare per il calcolo della  $K_t$  le formule per il  $K_I$  e viceversa.

Per esempio, nel caso della piastra con intagli laterali, se questi sono acuti in modo da dare luogo a due cricche contrapposte, si ha

$$K_I = F_1 \sigma_g \sqrt{\pi a} = F_1 \sigma_n \frac{d}{w} \sqrt{\pi a}$$

essendo  $F_1$  un fattore di forma che tiene conto della larghezza finita della piastra. Per la determinazione di  $F_1$  vi sono varie espressioni tra cui quella di Nisitani (1975)

$$F_1 = 1.122 - 0.154 \left( \frac{2a}{w} \right) + 0.807 \left( \frac{2a}{w} \right)^2 - 1.894 \left( \frac{2a}{w} \right)^3 + 2.494 \left( \frac{2a}{w} \right)^4$$

valida per  $2a/w \leq 0.8$  e quella di Benthem e Koiter (1972)

$$F_1 = \left( 1 + 0.122 \cos^2 \left( \frac{\pi \alpha}{2} \right) \right) \sqrt{\frac{\tan \left( \frac{\pi \alpha}{2} \right)}{\left( \frac{\pi \alpha}{2} \right)}}$$

in cui  $\alpha = 2a/w$ . La formula di Nisitani fornisce valori sistematicamente più bassi di quelli di Benthem e Koiter; una formula che dà valori intermedi è quella di Tada, Paris e Irwin (1973);

$$F_1 = \frac{1.122 - 1.122 \left( a/w \right) - 0.82 \left( a/w \right)^2 + 3.768 \left( a/w \right)^3 - 3.04 \left( a/w \right)^4}{\sqrt{1 - 2a/w}}$$

probabilmente la realtà è intermedia tra questa formula e quella di Nisitani.

A questi ragionamenti si riconduce la formula di interpolazione di Barrata e Neal

$$K_{tn} = \left( 0.780 + 2.243\sqrt{\frac{a}{r}} \right) \left[ 0.993 + 0.180 \left( \frac{2a}{w} \right) - 1.060 \left( \frac{2a}{w} \right)^2 + 1.710 \left( \frac{2a}{w} \right)^3 \right] \left( 1 - \frac{2a}{w} \right)$$

che si può anche scrivere

$$K_t = \left( 0.78 + 2.243\sqrt{\frac{a}{r}} \right) \frac{d}{w} F_2$$

ossia

$$\lim_{\sqrt{a/r} \rightarrow \infty} \frac{dK_t}{d\sqrt{a/r}} = 2.243 \frac{d}{w} F_2$$

essendo

$$F_2 = 0.993 + 0.180 \left( \frac{2a}{w} \right) + \dots$$

A conti fatti risulta  $2.243F_2 = 2F_1$  (nel campo di validità della formula si può adottare una qualsiasi espressione di  $F_1$ ) e questo rafforza la validità della formula di Barrata e Neal, che va bene per valori intermedi di  $d/w$  (per i valori più alti è preferibile la formula dell'ellisse).

Allo stessa linea di pensiero si riallaccia la formula di Shin

$$K_t = 1 + 2F_1\sqrt{\frac{a}{r}}$$

dove come al solito è abbastanza arbitraria la scelta dell'una o dell'altra espressione per  $F_1$ .

La formula di Barrata e Neal dà, però, dei valori di  $K_t$  anche inferiori ad 1 per bassi valori di  $2a/W$ . Per evitare questo inconveniente si può pensare ad una formula che abbia gli stessi pregi, ma che tenda ad 1 al tendere di  $2a/W$  a zero.

Una tale formula può essere la seguente (Giudice):

$$K_t = \frac{F_1}{1.122} \left( 1 + 2.243\sqrt{\frac{a}{r}} + 0.17 \log(0.05 + 10^{-1.429\sqrt{a/r}}) \right) \left( 1 - \frac{2a}{w} \right)$$

in cui la parte logaritmica serve appunto ad assicurare il raccordo tra il comportamento di  $K_t$  costante a basso  $\sqrt{a/r}$  e quello proporzionale a  $\sqrt{a/r}$ . Ad alti valori di  $2a/w$  questa formula dà valori troppo bassi di  $K_t$ , inferiori a quelli della formula di Neuber per intagli iperbolici, alla quale conviene dunque passare.

## 5.7 Aste a sezione circolare

Nelle figure seguenti sono riportati i casi, importantissimi per le applicazioni, di aste a sezione circolare con gola a sezione semicircolare o con spallamento, rispettivamente soggette a sforzo normale (figura 5.8), momento flettente (figura 5.9) e momento torcente (figura 5.10).



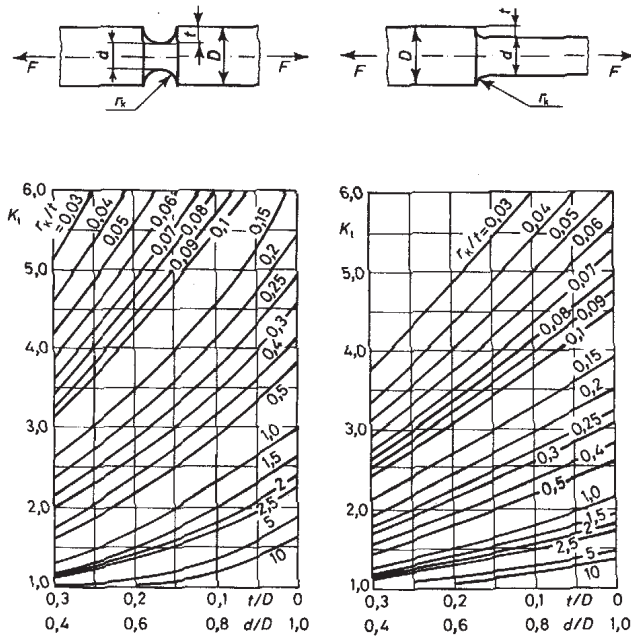


Figura 5.8: Coefficiente teorico di intaglio  $K_t$  per un'asta rettilinea a sezione circolare soggetta a sforzo normale

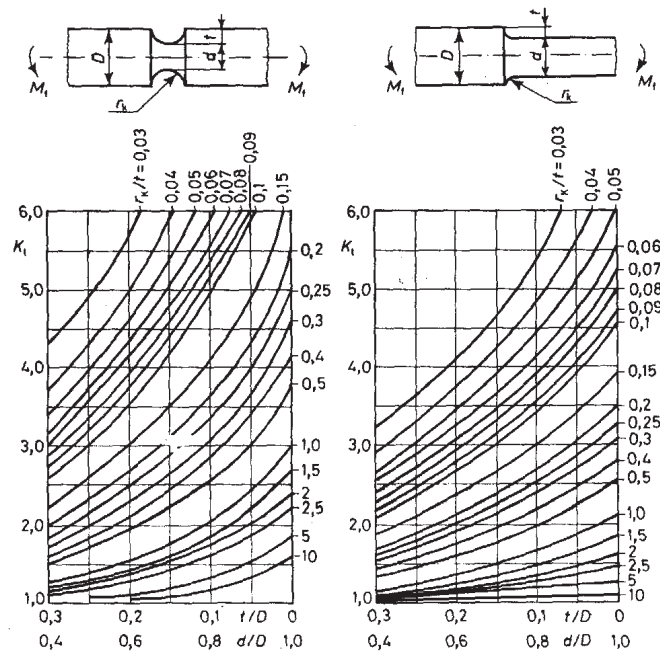


Figura 5.9: Coefficiente teorico di intaglio  $K_t$  per un'asta rettilinea a sezione circolare soggetta a momento flettente

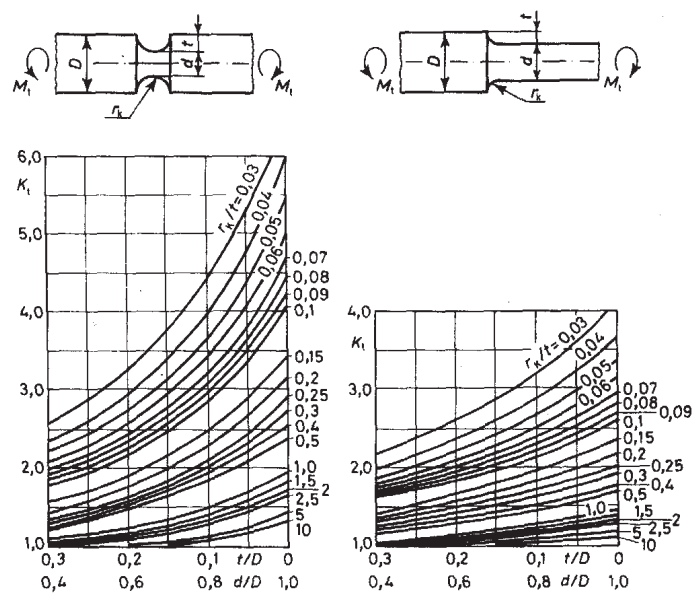


Figura 5.10: Coefficiente teorico di intaglio  $K_t$  per un'asta rettilinea a sezione circolare soggetta a momento torcente