

4. Metodo degli elementi finiti

4.1 Il problema generale dell'equilibrio elastico

Il problema dell'equilibrio elastico si propone di trovare le soluzioni di un complesso sistema di equazioni differenziali e algebriche:

- 3 equazioni indefinite dell'equilibrio
- 6 equazioni di congruenza (di cui solo tre differenzialmente indipendenti)
- 6 equazioni di Navier (esprimenti la legge di Hooke)

assieme con le relative condizioni ai limiti (equazioni di Cauchy) e di vincolo. Si tratta di 12 equazioni nelle dodici incognite costituite dalle componenti speciali di tensione e di deformazione.

La difficoltà del problema sta soprattutto nella forma del dominio elastico, cioè del corpo in cui si cerca di risolvere il problema; e infatti soluzioni analitiche sono note solo per domini molto semplici (semispazio, disco, eccetera).

Qualche semplificazione del problema è possibile, ma la tendenza attuale è di risolverlo attraverso l'applicazione del principio dei lavori virtuali, calcolando però lo spostamento in modo approssimato. Tale approccio dà luogo al metodo degli elementi finiti.

4.2 Spostamento e sua approssimazione

Lo spostamento di un punto P del corpo elastico è dato dalla funzione vettoriale \vec{s} di componenti u, v, w , che viene rappresentato con un vettore algebrico (vettore colonna)

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}$$

essendo u, v, w funzioni delle coordinate x, y, z del punto P.

Tutto il metodo degli elementi finiti riposa su opportuni postulati utilizzati per approssimare la funzione \mathbf{s} .

Il primo postulato è che lo spostamento sia funzione di x, y, z ma anche dagli spostamenti di un certo numero di punti scelti detti *nod*i. Quindi

$$u = u(x, y, z, u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_n, v_n, w_n)$$

e lo stesso vale per v e w .

Si postula inoltre che la dipendenza dai parametri $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_n, v_n, w_n$ sia lineare, e che quindi si possa mettere nella forma

$$\mathbf{s} = \mathbf{N}\mathbf{q}$$

in cui \mathbf{q} è il vettore colonna le cui componenti sono $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_n, v_n, w_n$.

Come ultimo postulato si ammette che la dipendenza lineare di u, v, w dalle componenti di \mathbf{q} sia effettiva (cioè abbia coefficiente diverso da zero) solo per i nodi "sufficientemente" vicini al punto P; tali sono i nodi che appartengono allo stesso sottodominio (elemento) cui appartiene il punto P.

4.3 Lineamenti generali

Il metodo degli elementi finiti può essere quindi così schematizzato:

1. Si suddivide la struttura in *elementi* di forma opportuna, collegati tra loro in punti detti nodi; gli elementi possono avere la stessa dimensionalità della struttura o anche una dimensionalità inferiore, per esempio si possono usare elementi monodimensionali per costruire una struttura tridimensionale; però questo caso sarà visto più oltre, per cui per il momento si considereranno solo strutture tridimensionali composti da elementi anch'essi tridimensionali.
2. Si adotta un opportuno *modello di spostamento*, cioè si ipotizza che lo spostamento $\mathbf{s}(P)$ in ogni punto P di un elemento sia funzione lineare dei soli spostamenti dei nodi appartenenti all'elemento e che quindi non dipenda nè dagli spostamenti di nodi non appartenenti all'elemento nè dagli spostamenti di altri punti. Lo spostamento $\mathbf{s}(P)$ comunque dipende anche dalle *coordinate* dei nodi dell'elemento, e questa dipendenza può essere non lineare. Lo spostamento, come si è detto, è una funzione vettoriale $\mathbf{s}(x, y, z)$ (equivalente a tre funzioni scalari u, v, w). Nel caso tridimensionale si pone

$$\mathbf{s}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \mathbf{N}(x, y, z)\mathbf{q}$$

in cui la matrice \mathbf{N} è una matrice di *funzioni di forma*¹ e \mathbf{q} è il vettore degli spostamenti nodali, ossia

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Il numero n è il numero di nodi dell'intera struttura; il vettore \mathbf{q} ha una dimensione molto grande (n può facilmente superare 2000 per cui la dimensione di \mathbf{q} supera 6000) e quasi tutti gli elementi della matrice \mathbf{N}^2 (cioè quelli che sono in colonne relative a nodi 'estranei') sono nulli. Impostando così il problema non si ha alcuna difficoltà nè concettuale nè di spazio di memoria, perché ovviamente vengono immagazzinati in memoria solo gli elementi diversi da zero, con i loro indici. Spesso, tuttavia, il vettore \mathbf{q} e le matrici \mathbf{N} e \mathbf{B} vengono riferite ai soli gradi di libertà dell'elemento: si tratta di una proiezione su un sottospazio, analogo al caso in cui una figura piana viene studiata in due dimensioni invece che in tre. Ciò semplifica la scrittura su carta delle equazioni ed in parte anche la programmazione ma presenta per il principiante qualche complicazione, per esempio quando si scrive l'equazione (3).

Per il calcolo delle funzioni di forma si veda appresso.

3. Si scrivono per ciascun elemento le espressioni delle deformazioni e delle tensioni in funzione

¹Nelle funzioni di forma entrano le coordinate del punto e quelle dei nodi; questa dipendenza può essere non lineare. Di solito la forma di tali funzioni è polinomiale, con le coordinate del punto a fungere da indeterminate e le coordinate dei nodi a formare i coefficienti.

²e della matrice \mathbf{B} che sarà introdotta più sotto

degli spostamenti. Posto

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \Delta \mathbf{s}$$

in cui è implicitamente definita la matrice Δ per cui

$$\boldsymbol{\epsilon} = \Delta \mathbf{N} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (1)$$

Le componenti di $\mathbf{B} = \Delta \mathbf{N}$ sono le derivate parziali delle funzioni di forma. Per la legge di Hooke

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}$$

in cui \mathbf{D} contiene le costanti elastiche del materiale³, quindi

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q}. \quad (2)$$

Le espressioni (1) e (2), anche se formalmente sono scritte per tutto il dominio della struttura in studio (anzi addirittura per tutto lo spazio) sono valide solo nell'ambito dell'elemento considerato perché solo lì le funzioni di forma danno un'approssimazione sufficiente.

4. Si scrive l'espressione dell'energia W di deformazione elastica, che è uguale al lavoro delle forze esterne nodali \mathbf{f}

$$W = \frac{1}{2} \sum_e \int_{V_e} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{f}$$

(dove la sommatoria è estesa a tutti gli elementi e l'integrale è fatto all'interno di ciascun elemento, per l'avvertenza data alla fine del numero precedente) da cui

$$\sum_e \int_{V_e} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} dV = \mathbf{q}^T \mathbf{f}$$

5. Al primo membro i vettori \mathbf{q}^T e \mathbf{q} si possono portare fuori sia del segno di integrale che del segno di sommatoria, per cui

$$\mathbf{q}^T \left(\sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{f}$$

³La matrice \mathbf{D} , nel caso di un problema elastico tridimensionale riguardante un materiale omogeneo e isotropo vale:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix}$$

Essa esprime in forma matriciale le equazioni inverse di Navier.

che, con la posizione,

$$\mathbf{K} = \sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad (3)$$

e con ovvia semplificazione restituisce l'equazione fondamentale del metodo degli elementi finiti

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (4)$$

in cui il vettore \mathbf{q} degli spostamenti nodali è incognito e il vettore \mathbf{f} delle forze nodali è noto. La matrice \mathbf{K} che compare nella (2) è detta *matrice di rigidità* ed ha una notevolissima interpretazione: se tutti i gradi di libertà vengono bloccati tranne quello i -esimo e a quest'unico si impone uno spostamento unitario, la reazione del vincolo j -esimo è proprio K_{ij} (a parte il segno).

6. Si impongono gli opportuni vincoli *cancellando* quelle righe e quelle colonne della matrice \mathbf{K} e quegli elementi dei vettori \mathbf{f} e \mathbf{q} che corrispondono a gradi di libertà soppressi.
7. Si risolve la (2) con i consueti metodi dell'algebra lineare.

4.4 Proprietà e significato fisico della matrice \mathbf{K} .

La matrice \mathbf{K} è simmetrica, data la simmetria della matrice \mathbf{D} . Infatti la sua trasposta si scrive

$$\mathbf{K}^T = \sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^T \mathbf{B} dV,$$

e tale espressione, per la (3) e per la simmetria di \mathbf{D} è evidentemente uguale a \mathbf{K} .

Per quanto riguarda il suo significato fisico, si ricordi che

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$$

è il lavoro delle forze interne, quindi si può interpretare $\mathbf{K} \mathbf{q}$ come la forza interna che postmoltiplicata per \mathbf{q}^T restituisce il lavoro, salvo il fattore 1/2 dovuto al teorema di Clapeyron.

Ora, un elemento del vettore $\mathbf{K} \mathbf{q}$ è dato da

$$K_{i1} q_1 + K_{i2} q_2 + \dots + K_{in} q_n$$

Tale elemento produce lavoro per effetto dello spostamento q_i , quindi si interpreta come la forza interna "corrispondente" al grado di libertà i -esimo; ed in definitiva K_{ij} è la forza interna che agisce sul grado di libertà i -esimo per effetto dello spostamento unitario $q_j = 1$ essendo stati fissati a zero tutti gli altri spostamenti degli altri gradi di libertà.

O ancora, K_{ij} è il lavoro mutuo che si ha per uno spostamento unitario del grado di libertà i -esimo e del grado di libertà j -esimo.

4.5 Complementi e complicazioni

1. L'espressione

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad (5)$$

dove l'integrale è esteso al solo volume dell'elemento e , è detta matrice di rigidità dell'elemento e . In questo modo la (3) si scrive

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^{(e)} \quad (3')$$

e questa espressione è quella comunemente usata, sempre per ragioni di occupazione di memoria.

La matrice $\mathbf{K}^{(e)}$ viene di solito scritta eliminando tutte le righe e le colonne che si riferiscono a gradi di libertà estranei all'elemento considerato. Le matrici così scritte non possono essere direttamente sommate tra loro (ovviamente al momento di fare la somma le righe e le colonne provvisoriamente cancellate devono essere in qualche modo ripristinate: esistono dei semplici algoritmi che si incaricano della bisogna) ma sono di dimensioni maneggevoli e oltretutto dipendenti non dalla intera struttura ma solo dal tipo di elemento al quale si riferiscono: se ne vedranno degli esempi più sotto.

2. L'ordine in cui sono elencati i gradi di libertà nel vettore \mathbf{q} determina la scrittura di tutte le matrici e può in generale essere qualsiasi, purché fissato una volta per tutte in ogni singolo problema. Per ragioni di spazio di memoria si preferisce procedere così:

a) si numerano i nodi in modo che *la massima differenza (in valore assoluto) tra i nodi di uno stesso elemento sia quanto più piccola possibile.*

b) si ordinano i gradi di libertà prendendo nell'ordine lo spostamento u del primo nodo, lo spostamento v del primo nodo, lo spostamento w del primo nodo, lo spostamento u del secondo nodo e così via fino allo spostamento w dell'ultimo nodo.

In questo modo si ottiene una matrice di rigidezza *a banda*, ossia tale da avere diversi da zero solo gli elementi della diagonale principale e di poche diagonali ad essa adiacenti.

3. *Calcolo completo di una matrice di rigidezza: l'elemento tetraedrico a quattro nodi.* Per il caso di un tetraedro con quattro nodi (il più semplice elemento tridimensionale) la matrice \mathbf{N} , riferita agli spostamenti dei soli nodi dell'elemento, si scrive:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_l & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_l & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_l \end{pmatrix}$$

dove le N_i, N_j ecc. sono funzioni interpolanti lineari; in particolare la N_i vale 0 sulla faccia jkl e vale 1 nel nodo i ed è proporzionale alla distanza del punto considerato dalla faccia jkl . Le funzioni di forma (vedi Rao pag. 123) sono le seguenti:

$$N_i = \frac{1}{6V^{(e)}}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)$$

$$N_j = \frac{1}{6V^{(e)}}(a_j + b_j x + c_j y + d_j z)$$

e le analoghe per N_k ed N_l ; nelle precedenti espressioni vale:

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$b_i = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$c_i = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix}$$

$$d_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}$$

e le altre costanti si ottengono dalle precedenti permutando circolarmente i pedici i, j, k, l . I valori x_i, y_i, z_i sono poi le coordinate del primo vertice del tetraedro e così via. Essendo $\mathbf{B} = \Delta \mathbf{N}$ si ha

$$B_{11} = \frac{\partial}{\partial x} N_i = \frac{b_i}{6V_e}$$

eccetera, per cui

$$\mathbf{B} = \frac{1}{6V_e} \begin{pmatrix} b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_k & 0 & 0 & b_l & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_k & 0 & 0 & c_l & 0 \\ 0 & 0 & d_i & 0 & 0 & d_j & 0 & 0 & d_k & 0 & 0 & d_l \\ c_i & b_i & 0 & c_j & b_j & 0 & c_k & b_k & 0 & c_l & b_l & 0 \\ 0 & d_i & c_i & 0 & d_j & c_j & 0 & d_k & c_k & 0 & d_l & c_l \\ d_i & 0 & b_i & d_j & 0 & b_j & d_k & 0 & b_k & d_l & 0 & b_l \end{pmatrix}$$

Poiché \mathbf{B} e \mathbf{D} sono indipendenti dalla posizione x, y, z , si ha

$$\mathbf{K}^{(e)} = V_e \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$$

in cui V_e è il volume dell'elemento.

6. Per elementi tridimensionali non lineari e per elementi bi- e momodimensionali facenti parte di una struttura tridimensionale conviene scrivere le matrici \mathbf{N} e \mathbf{B} in coordinate locali, in modo da semplificare i calcoli, riconducendosi poi a coordinate globali.

7. *L'elemento isoparametrico triangolare a sei nodi di secondo grado in stato piano di tensione o di deformazione.* Gli elementi isoparametrici sono caratterizzati da maggiore flessibilità perché possono avere lati curvi. Le funzioni di forma vengono scritte in funzione di coordinate interne, che in questo caso sono L_1, L_2, L_3 (vedi figura) con $L_1 + L_2 + L_3 = 1$. I nodi posti sui lati permettono di ottenere contorni curvi. Risulta

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q}$$

con

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_6 \\ v_6 \end{pmatrix}$$

ed

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & n_6 \end{pmatrix}$$

essendo

$$N_i = L_i(2L_i - 1) \quad i = 1, 2, 3$$

$$N_4 = 4L_1L_2$$

$$N_5 = 4L_2L_3$$

$$N_6 = 4L_3L_1.$$

Eliminando L_3 si ha:

$$N_3 = 1 - 3(L_1 + L_2) + 2(L_1 + L_2)^2$$

e gli altri N_i rimangono invariati

Per permettere l'esistenza di lati curvi si pone (condizione di isoparametricità)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{x}$$

essendo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_6 \\ y_6 \end{pmatrix}$$

ed \mathbf{N} è definito come sopra. Sappiamo che è

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{q}$$

con

$$\mathbf{B} = \Delta\mathbf{N}$$

in cui in questo caso

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Risulta quindi

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{pmatrix}$$

in cui le funzioni di forma N_i sono espresse in funzione delle coordinate naturali L_1 ed L_2 .

Per valutare \mathbf{K} e il vettore delle forze esterne sono necessarie due trasformazioni. Innanzitutto la matrice \mathbf{K} deve essere espressa in termini di derivate delle funzioni di forma rispetto alle variabili naturali e non rispetto alle x ed y . Successivamente gli integrali di superficie e di volume devono essere espressi in termini delle coordinate naturali con un opportuno cambio degli estremi di integrazione.

Per la prima trasformazione si fa uso della matrice jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{pmatrix}$$

che vale (vedi Rao p. 235)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} x_i & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} y_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} x_i & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} y_i \end{pmatrix}$$

cosicché

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{pmatrix}.$$

Per la seconda trasformazione vedi Rao pag. 236.

4.6 Analisi dinamica

Per scrivere l'equazione fondamentale del metodo degli elementi finiti nel caso dinamico (ossia con forze esterne variabili nel tempo), applicheremo il principio di d'Alembert, che impone di sommare alle forze agenti le forze d'inerzia. Calcoliamo preliminarmente la forza d'inerzia di un elementino di densità ρ e volume dV . Se $\mathbf{s}(t)$ è lo spostamento di tale elementino, la forza d'inerzia è

$$dI = -\rho \ddot{\mathbf{s}} dV$$

Se per lo spostamento si adotta la stessa espressione usata nel caso statico

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{q}(t)$$

risulta

$$dI = -\rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} dV.$$

Integrando su tutta la struttura (quindi su tutto il volume V), si ha

$$I = - \int_V \rho \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}$$

con opportuno significato della matrice \mathbf{M} . tale termine va aggiunto al secondo membro dell'equazione generale (4) degli Elementi Finiti, che quindi risulta:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (6)$$

Alla stessa equazione si arriva sfruttando le equazioni di Lagrange, con opportune ipotesi sulla natura delle forze agenti. Nella (6) viene talvolta fatto comparire un termine riguardante lo smorzamento, ma esso non è eccessivamente importante per le applicazioni e verrà quindi trascurato. Va detto infine che la matrice \mathbf{M} così ottenuta prende il nome di *matrice compatibile delle masse*, e risulta una matrice a banda, con larghezza di banda molto piccola, mentre in altri casi si utilizza una *matrice concentrata delle masse*, che risulta addirittura diagonale.

Una volta trovata l'equazione generale (6) per la dinamica dei sistemi schematizzati col metodo degli elementi finiti, occorre passare alla risoluzione. La grande varietà del vettore delle forze esterne, in cui evidentemente tutti gli elementi sono funzioni del tempo, impone però dei trattamenti standardizzati e molto schematici. Tra essi prevale per importanza quello dell'*analisi modale*.

Questo consiste innanzitutto nel trascurare lo smorzamento, e quindi nel cercare la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (6)

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6')$$

in modo che sia

$$\mathbf{q} = \mathbf{x} \sin \omega t$$

Derivando e sostituendo nella (6') si ha

$$[-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}] \sin \omega t = \mathbf{0}$$

e quindi

$$-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K} = \mathbf{0}$$

che va sotto il nome di *problema generalizzato degli autovettori*, che si risolve con tecniche standard.⁴ Questo problema fornisce tanti autovalori ω^2 e tanti autovettori \mathbf{x} quanti sono i gradi di libertà del sistema, ma, e questo è il bello, se ne prendono in considerazione solo pochissimi, cioè i primi tre, o, per dire, i primi

⁴Nota psicologica: Spesso ho trovato difficoltà a seguire dei passaggi matematici se non avevo un'idea precisa dell'algoritmo che fornisce una soluzione effettiva (numerica) del problema proposto. Ancora meglio se l'algoritmo è effettivamente disponibile su una macchina da calcolo fisicamente esistente e non troppo dispendiosa. Per esempio, calcolare un seno o un coseno era discretamente difficile trent'anni fa, ed è diventato incredibilmente facile con le 'macchinette' tascabili. Allo stesso modo, non tratterei in questo corso il metodo degli elementi finiti se non avessi a disposizione *più* codici (alcuni dei quali 'aperti') per l'effettiva risoluzione del problema. Programmi per la manipolazione di matrici e quindi anche per il problema degli autovettori si trovano in tutti i pacchetti standard, tra cui il NAG, Numerical Recipes, Matlab e credo anche Mathematica.

venti, e gli altri non si calcolano neppure⁵. Gli autovalori più alti infatti hanno una importanza via via più piccola in quanto eccitano solo una parte via via più piccola della struttura, stante il moltiplicarsi di *punti nodali*, in numero pari all'ordine dell'autovettore, in cui la materia è ferma.

Riassumendo: gli autovettori sono le ampiezze delle soluzioni non banali della (6') e si possono ottenere solo se la soluzione è sinusoidale nel tempo e con pulsazione apposita (il corrispondente autovalore). Per ottenere correttamente la soluzione del problema degli autovalori occorre eliminare i gradi di libertà di corpo rigido, che introdurrebbero degli autovalori spuri $\omega^2 = 0$. Inoltre, gli autovalori sono determinati a meno di una costante arbitraria, cosa che permette di *normalizzarli* in modo opportuno.

Gli autovettori possono essere utilizzati per disaccoppiare le equazioni del moto attraverso un opportuno cambiamento di variabili (le \mathbf{q} sono coordinate lagrangiane e quindi possono essere cambiate ogni volta che fa comodo, purché la corrispondenza tra vecchie e nuove coordinate sia biunivoca).

In questo caso si pone

$$\mathbf{q} = \mathbf{X}\mathbf{p} \quad (7)$$

in cui la matrice \mathbf{X} è formata giustapponendo tutti e soli gli autovettori (che sono ovviamente dei vettori colonna) che sono stati presi in considerazione. Si tratta evidentemente di una matrice 'alta' e 'stretta', visto che ha tante righe quanto il numero di gradi di libertà del sistema originario, e solo pochissime colonne (tre è il minimo di legge per l'analisi sismica). Le coordinate \mathbf{p} si chiamano *coordinate principali*.

Sostituendo la (7) nella (6) e manipolando (parecchio) il risultato ottenuto si ha:

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{L}\mathbf{p} = \mathbf{U}\mathbf{f} \quad (8)$$

in cui \mathbf{L} è la matrice diagonale degli autovettori ω_i^2 ; il fatto che questa matrice sia diagonale assicura che il sistema (8), che ha ormai 'poche' (tre è il minimo) equazioni in altrettante incognite, è disaccoppiato (ossia, in ogni equazione compare una sola incognita).

Per quanto riguarda il secondo membro della (8), tutto naturalmente dipende dalla forma delle funzione $f_i(t)$. Se si deve effettuare un'analisi sismica, esse hanno tre caratteristiche: sono di durata limitata, sono molto ricche di armoniche e sono inoltre proporzionali alla massa, in quanto forze d'inerzia.

Si suole quindi scrivere il secondo membro come

$$-\mathbf{g}\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$$

in cui, a conti fatti

$$g_i = \frac{\sum_{k=1}^n m_k p_k^{(i)}}{\sum_{k=1}^n m_k \left(p_k^{(i)}\right)^2}$$

essendo $p_k^{(i)}$ gli elementi dell'autovettore i -esimo e m_k delle opportune masse associate a ciascun grado di libertà e che possono essere identificate con gli elementi della diagonale principale della matrice concentrata delle masse o ricavate facilmente dagli elementi non nulli della matrice compatibile delle masse.

Rimangono da trovare gli **effetti dell'eccitazione dei vari modi di vibrare sulle coordinate** q_i . A tale scopo si immagina di eseguire l'integrazione di ciascuna delle equazioni disaccoppiate, trovando un valore massimo per ciascuna delle p_i e delle sue derivate:

$$(\ddot{p}_i)_{max} = g_i (S_a)_i$$

$$(\dot{p}_i)_{max} = g_i (S_v)_i$$

$$(p_i)_{max} = g_i (S_d)_i$$

essendo $(S_d)_i$, $(S_v)_i$ e $(S_a)_i$ delle opportune funzioni della eccitazione. In pratica la normativa fornisce $(S_a)_i$ in funzione della pulsazione ω_i del modo i -esimo, mentre le altre due si ottengono dividendo la prima rispettivamente per ω_i e ω_i^2 .

Per quanto riguarda il comportamento del vettore \mathbf{q} per effetto del modo di vibrare i -esimo, di esso importa soprattutto il massimo valore che assume ognuna delle sue componenti e le rispettive derivate. Si ha quindi

$$\left(\ddot{q}_k^{(i)}\right)_{max} = \mathbf{x}^{(i)} (\ddot{p}_i)_{max} = \mathbf{x}^{(i)} g_i (S_a)_i$$

⁵I citati programmi standard forniscono delle routine che calcolano solo i primi autovalori, con incredibile risparmio di tempo macchina

$$\begin{aligned} \left(q_k^{(i)} \right)_{max} &= \mathbf{x}^{(i)} (p_i)_{max} = \mathbf{x}^{(i)} g_i (S_v)_i \\ \left(q_k^{(i)} \right)_{max} &= \mathbf{x}^{(i)} (p_i)_{max} = \mathbf{x}^{(i)} g_i (S_d)_i \end{aligned}$$

In un buon codice ad elementi finiti, tuttavia, non è ancora questa la fine del gioco, occorre infatti calcolare le caratteristiche di sollecitazione (per esempio i momenti) e addirittura le tensioni e deformazioni in ogni punto.

A tale scopo occorrerebbe combinare i modi eccitati nella peggior maniera possibile. per brevità il trattamento standard di questi dati avviene però in maniera diversa, ipotizzando che i modi eccitino la struttura in maniera statisticamente indipendente (p.e. che durante il massimo indotto da un modo su una delle caratteristiche della sollecitazione tutti gli altri modi siano ‘abbastanza’ lontani dal massimo). Questa ipotesi conduce immediatamente alla formula

$$\sigma(P) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma^{(i)}(P))^2}$$

in cui si è preso come esempio di calcolo il valore di una σ (non importa specificare quale) in un punto P (ma lo stesso vale per le deformazioni, per i momenti eccetera). I valori $\sigma^{(i)}(P)$ sono quelli che la componente in studio della tensione assume in quel punto P per effetto del modo i -esimo.