

3. Richiami di Resistenza dei Materiali

3.1 Analisi della tensione

Si ammette come postulato che se un corpo è sezionato lungo una qualsiasi superficie, esso rimane in equilibrio applicando alla superficie di taglio delle opportune forze $d\mathbf{F}$ distribuite. In ogni punto la tensione \mathbf{t} è data da

$$\mathbf{t} = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{F}}{dA}$$

dove dA è un elementino di superficie nell'intorno di P e $d\mathbf{F}$ è la forza su di esso agente. Le componenti di \mathbf{t} rispetto alla terna ortogonale n, m, l dove n è la normale a dA sono dette componenti speciali di tensione e si indicano con

$$t_n = \sigma_n$$

$$t_l = \tau_{nl}$$

$$t_m = \tau_{nm}$$

In particolare è utile considerare le componenti speciali quando le direzioni di n, m, l coincidono (non necessariamente in quest'ordine) con quelle degli assi x, y, z

EQUAZIONI DI CAUCHY¹

Rispondono alla domanda: Qual è la tensione su un piano di giacitura n_x, n_y, n_z (questi sono i coseni direttori della normale alla giacitura, ovvero le componenti cartesiane del versore normale alla giacitura) se sono note le componenti speciali di tensione?

Si scrivono in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xy} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

e in notazione di Einstein

$$t_{ni} = \sigma_{ij} n_j.$$

La matrice delle componenti speciali di tensione appare come un operatore σ che trasforma vettori giaciture in vettori tensione.

EQUAZIONI AI LIMITI

Basta scrivere le equazioni di Cauchy con riferimento alla pressione esterna. In questo caso $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ sono i coseni direttori della normale alla superficie esterna.

PROPRIETÀ DI SIMMETRIA DELLE TENSIONI TANGENZIALI

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

EQUAZIONI INDEFINITE DELL'EQUILIBRIO

¹Augustine-Louis Cauchy (Parigi 1789 - Sceaux, Seine, 1857), matematico.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

eccetera, che si possono anche scrivere come

$$\operatorname{div} \sigma + \mathbf{F} = 0$$

DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE.

Principale è quella direzione tale che sulla giacitura ad essa normale non siano presenti tensioni tangenziali, ma al massimo tensioni normali.

Ciò significa che il vettore tensione è parallelo al vettore giacitura, e quindi le direzioni principali sono gli autovettori dell'operatore σ . Le tensioni principali sono i relativi autovalori.

STATI PIANI DI TENSIONE

1) uno stato di tensione è piano quando al variare della giacitura il vettore tensione giace sempre in un piano (piano delle tensioni)

2) uno stato di tensione è piano quando esiste una giacitura sulla quale non vi è tensione nè normale nè tangenziale. Questo piano coincide col piano delle tensioni sopra definito.

Le due definizioni qui date sono equivalenti.

I due casi più importanti di stato piano di tensione sono:

- lastra o membrana di piccolo spessore, in cui il piano delle tensioni coincide punto per punto col piano tangente.
- solido di de Saint Venant² in cui il piano scarico è parallelo all'asse del solido e alla direzione punto per punto della τ sulla sezione normale.

CERCHI DI MOHR³

Se sul piano σ, τ si rappresentano, con le convenzioni seguenti, le tensioni agenti su tutte le giaciture di un certo fascio i punti rappresentativi giacciono su archi di circonferenza.

Particolare importanza hanno i cerchi di Mohr per fasci di giaciture aventi per sostegno una direzione principale di tensione (cerchi principali di Mohr).

Convenzioni: 1) Le σ di trazione sono positive, quelle di compressione negative. 2) Le τ che inducono una rotazione oraria del cubetto sono positive.

Ricerca delle tensioni principali su un cerchio principale di Mohr: posto che z sia una direzione principale e che siano note σ_x, σ_y e τ_{xy} ,

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

²Adhemar-Jean-Claude Barré de Saint Venant (Villiers-en-Brie 1797 - Saint Ouen, Loir-et-Cher 1886), ingegnere e matematico.

³Christian Otto Mohr (Wesslburen, Holstein 1835 - Dresda 1918), ingegnere, costruttore di ponti.

3.2 Legame tensione-deformazione

Ci si limita al campo elastico per materiali omogenei e isotropi.

Nel caso più semplice di solido prismatico di materiale omogeneo e isotropo soggetto a sforzo assiale si constata che si ha allungamento lungo l'asse e contrazione nelle dimensioni perpendicolari all'asse. Inoltre l'allungamento e l'accorciamento sono proporzionali alla tensione e le costanti di proporzionalità sono caratteristiche del materiale. Questa relazione di proporzionalità venne scoperta per la prima volta da Hooke⁴ (1676) nelle sue ricerche sulle molle da orologio.

In formula, se z è la direzione della forza, si ha

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z$$
$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z.$$

E è detto modulo di elasticità longitudinale o semplicemente modulo di elasticità o anche modulo di Young; ν è detto modulo di Poisson o coefficiente di contrazione laterale.

EQUAZIONI DI NAVIER⁵

Se agiscono contemporaneamente tensioni lungo i tre assi, per il principio di sovrapposizione degli effetti si ha:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$
$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$
$$\epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

in cui

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

è detta modulo elastico trasversale o prima costante di Lamé⁶ (in questo caso spesso indicata con μ).

EQUAZIONI INVERSE DI NAVIER

Le ultime tre si invertono in modo ovvio.

Le prime tre, invece, sommate danno

$$E(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = (1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (1)$$

⁴Robert Hooke (Freshwater, Isola di Wight 1635 - Londra 1703), fisico, matematico e naturalista.

⁵Louis-Marie-Henry Navier (Digione 1785 - Parigi 1836), ingegnere.

⁶Gabriel Lamé (Tours 1795 - Parigi 1870), fisico matematico

La prima eq. di Navier si riscrive, aggiungendo e sottraendo $\nu\sigma_x$,

$$E\epsilon_x = (1 - \nu)\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = (1 + \nu)\sigma_x - \frac{\nu E}{1 - 2\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

da cui

$$\sigma_x = \frac{E}{1 + \nu} \left(\epsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right)$$

che si scrive

$$\sigma_x = 2G\left(\epsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu}e\right)$$

essendo

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

La forma più comune in cui vengono scritte le equazioni inverse di Navier è la seguente:

$$\sigma_x = 2\mu\epsilon_x + \lambda e$$

$$\sigma_y = 2\mu\epsilon_y + \lambda e$$

$$\sigma_z = 2\mu\epsilon_z + \lambda e$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \mu\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}$$

in cui μ , prima costante di Lamé, non è altro che il modulo elastico trasversale G e λ , seconda costante di Lamé, è data da

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

EQUAZIONI DI NAVIER IN NOTAZIONE DI EINSTEIN

è opportuno a questo punto porre le equazioni di Navier in una forma più sintetica, utilizzando la notazione di Einstein per i tensori, che sarà utilizzata anche nelle sezioni successive, dedicate ai deviatori degli sforzi e delle deformazioni e alla termodinamica della deformazione.

- 1) gli indici x,y,z sono sostituiti da 1,2,3 rispettivamente
- 2) viene posto $\sigma_x = \sigma_{11}$; $\sigma_y = \sigma_{22}$; $\sigma_z = \sigma_{33}$
- 3) viene posto $\epsilon_x = \epsilon_{11}$; $\epsilon_y = \epsilon_{22}$; $\epsilon_z = \epsilon_{33}$; $(1/2)\gamma_{xy} = \epsilon_{12}$ eccetera.

In questo modo il tensore degli sforzi viene indicato con σ_{ij} e il tensore delle deformazioni con ϵ_{ij} .

4) la somma $\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$, già indicata con e viene indicata con ϵ_{ii} sottintendendo il simbolo di sommatoria. In generale, ogni volta che un indice è ripetuto si sottintende che viene eseguita la sommatoria facendo variare quell'indice da 1 a 3.

- 5) Si introduce il tensore unitario

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

detto delta di Kronecker⁷ Con queste notazioni le equazioni inverse di Navier si scrivono

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk}$$

(notare l'uso di un indice muto diverso da i e da j).

DEVIATORE DEGLI SFORZI E DELLE DEFORMAZIONI

La relazione tra sforzi e deformazioni per materiali elastici omogenei e isotropi (legge di Hooke o equazioni di Navier) può essere posta in forma assai espressiva (e assai più mnemonica) suddividendo i tensori degli sforzi e delle deformazione in parte sferica e parte deviatorica. La parte sferica è un tensore isotropo, mentre la parte deviatorica è un tensore a traccia nulla (il che non significa che sono nulli i termini della diagonale principale ma solo che è nulla la loro somma).

Si definisce ora un deviatore degli sforzi

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\delta_{ij}\sigma_{kk}}{3}$$

e analogamente un deviatore delle deformazioni

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{\delta_{ij}\epsilon_{kk}}{3}.$$

Le parti sferiche sono date rispettivamente da $\sigma''_{ij} = \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$ e da $\epsilon''_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_{kk}/3$.

Sostituendo le eq. inv. di Navier nella definizione del deviatore degli sforzi

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} - \frac{\delta_{ij}\sigma_{kk}}{3}$$

e sostituendo l'espressione del deviatore delle deformazioni

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\epsilon'_{ij} + \frac{2\mu}{3}\delta_{ij}\epsilon_{kk} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} - \frac{\delta_{ij}\sigma_{kk}}{3}$$

ovvero

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\epsilon'_{ij} + \delta_{ij}\left(\frac{2\mu}{3}\epsilon_{kk} + \lambda\epsilon_{kk} - \frac{\sigma_{kk}}{3}\right).$$

Quando $i \neq j$ si ha $\delta_{ij} = 0$ e quindi

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\epsilon'_{ij}.$$

Quando invece $i = j$ si ha, sommando le tre equazioni e ricordando che $\sigma'_{ii} = 0$ e $\epsilon'_{ii} = 0$,

$$\sigma_{kk} = \epsilon_{kk}(2\mu + 3\lambda). \quad (1')$$

Di solito si pone

$$2\mu + 3\lambda = 3K$$

dove K è il *modulo di elasticità di volume* o *modulo di compressione uniforme*; μ è anche detto *modulo di scorrimento*. Come si vede la (1') è identica alla (1) di pag. 3-3.

Scritta in questo modo la legge di Hooke, si può dire che un corpo reagisce alla deformazione in due modi: se la deformazione implica una variazione di volume, il corpo reagisce aumentando o diminuendo la sua pressione (parte sferica del tensore degli sforzi); se invece la deformazione implica una variazione di forma il corpo reagisce con la corrispondente componente del deviatore degli sforzi. Così la variazione di volume non coinvolge la variazione di forma e le singole componenti del tensore degli sforzi sono disaccoppiate tra loro.

Tale conclusione è però vera solo per i corpi isotropi.

Si dimostra facilmente che il lavoro compiuto da una tensione idrostatica per effetto del deviatore delle deformazioni è nullo e che tale è anche il lavoro compiuto da una tensione deviatorica per effetto di una deformazione sferica. Infatti

$$\sigma'_{ij}\epsilon''_{ij} = \sigma'_{ij}\delta_{ij}\epsilon_{kk}/3 = \sigma'_{ii}\epsilon_{kk}/3 = 0$$

⁷Leopold Kronecker (Liegnitz 1823 - Berlino 1894), matematico. famoso presso il popolino per il detto "Dio creò i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo"

in quanto $\sigma'_{ii} = 0$. Così anche l'energia elastica si suddivide tra un'aliquota relativa alla variazione di volume e un'aliquota relativa alla variazione di forma.

$$\phi_v = \frac{1}{2} \sigma_{ii} \epsilon_{ii}$$

$$\phi_f = \frac{1}{2} \sigma'_{ik} \epsilon'_{ik}.$$

Si noti infine che il coefficiente $K = E/(3(1-2\nu))$ è il reciproco del coefficiente di comprimibilità isoterma che vale $6.4 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ per il ferro e $4.6 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$ per l'acqua.

PROPAGAZIONE DELLE ONDE

Si ricorda che nei solidi sono possibili due tipi di onde elastiche:

- onde rotazionali o di distorsione, caratteristiche dei solidi, che si propagano con velocità

$$v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

- onde irrotazionali o di dilatazione, presenti anche nei fluidi, che si propagano con velocità

$$v_P = \sqrt{\frac{K + (4/3)\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

3.3 Termodinamica della deformazione

L'aumento dell'energia interna di un sistema è dato dalla differenza tra il calore ricevuto dal sistema e il lavoro compiuto dal sistema⁸. Nel nostro caso il sistema è un cubetto prelevato dal corpo in tensione. Su una coppia di facce opposte agiscono dall'esterno le forze $\sigma_{ij} dA$, quindi il sistema reagisce sull'ambiente con le forze $-\sigma_{ij} dA$. Queste compiono lavoro per effetto dello spostamento $d\epsilon_{ij} dL$ dove dL è la dimensione del cubetto normale alla faccia di area dA . Il lavoro totale è dato dalla somma dei lavori compiuti dalle forze agenti su tutte le coppie di facce, che si può esprimere con $-\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dL dA = -\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV$ dove V è il volume del cubetto. Il lavoro per unità di volume è quindi

$$dR = -\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

Nella meccanica dei solidi è usuale riferire le grandezze termodinamiche all'unità di volume invece che all'unità di massa, per cui la variazione di energia interna si scrive

$$dU = T dS + \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

in cui le maiuscole indicano appunto grandezze riferite all'unità di volume.

Introducendo l'energia libera di Helmholtz $F = U - TS$ si ha

$$dF = -S dT + \sigma_{ij} d\epsilon_{ij},$$

per cui si può scrivere

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T$$

L'espressione dell'energia libera in funzione del tensore di deformazione si trova facilmente per piccoli valori della deformazione, perché basta allora uno sviluppo in serie limitata ai termini di grado più basso. Ci si limita qui al caso dei corpi isotropi.

Dato un corpo ad una certa temperatura, si considera non deformato lo stesso corpo in assenza di forze esterne per la stessa temperatura, per escludere dal conto quelle deformazioni (dilatazioni termiche) che non sono dovute a tensioni. Ora, per $\epsilon_{ij} = 0$ si ha per definizione $\sigma_{ij} = 0$, quindi nella espressione di F non compaiono termini lineari in $\epsilon_{ij} = 0$. Quindi nella espressione di F compaiono solo termini quadratici.

⁸Più precisamente il lavoro compiuto dalle forze che il sistema esercita sull'ambiente

Dato che l'energia libera F è uno scalare, ogni termine dello sviluppo sarà uno scalare. Con un tensore simmetrico u_{ij} si possono costruire due scalari indipendenti di secondo grado; si possono assumere come tali u_{ii}^2 , il quadrato della somma delle componenti diagonali, e u_{ik}^2 , la somma dei quadrati delle componenti.

Landau - Lifšits, Vol VII pag. 20

Nel nostro caso, ricordando l'espressione della legge dell'elasticità in funzione delle parti sferiche e deviatoriche dei tensori, non può essere che

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} \epsilon_{ii}^2 + \mu \epsilon_{ij}^2$$

in cui compaiono le costanti di Lamé. Scrivendo il differenziale totale si ha

$$\begin{aligned} dF &= dF_0 + \lambda \epsilon_{ii} d\epsilon_{ii} + 2\mu \epsilon_{ij} d\epsilon_{ij} = \\ &= \left(\lambda \epsilon_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \right) d\epsilon_{ij} \end{aligned}$$

da cui, poiché dF_0 dipende anche dalla temperatura,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T = \lambda \epsilon_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}.$$

In questo modo si sono riottenute le equazioni di Navier.

3.4 Criteri di resistenza

Sono in uso vari criteri di resistenza, ciascuno basato su una ipotesi di rottura:

1) Criterio della massima tensione (o di Rankine⁹-Navier):

La rottura è causata dal superamento della massima tensione normale σ a trazione o a compressione

2) Criterio della massima deformazione o di Grashof¹⁰:

La rottura è causata dal superamento della massima deformazione ϵ a dilatazione o a compressione.

3) Criterio della massima tensione tangenziale (o di Guest¹¹ o di de Saint Venant o di Tresca¹²):

La rottura è causata dal superamento della massima tensione tangenziale τ

4) Criterio di Hencky-von Mises:

La rottura è causata dal superamento della massima tensione tangenziale ottaedrale (Roš-Eichinger¹³) o dello sforzo tangenziale composto (von Mises¹⁴) o della massima energia associata a variazione di forma (Huber¹⁵-Hencky¹⁶). Le tre ipotesi sono equivalenti.

5) Criterio di Coulomb¹⁷ e criterio della curva intrinseca:

La rottura è causata dal superamento dell'attrito interno tra piani adiacenti.

⁹William John Macquorn Rankine (Edimburgo 1820 - Glasgow 1872), ingegnere e fisico

¹⁰Franz Grashof (Düsseldorf 1826 - Karlsruhe 1893), ingegnere.

¹¹J. J. Guest, fine XIX - inizio XX sec.

¹²Henri-édouard Tresca (Dunkerque 1814 - Parigi 1885), ingegnere.

¹³di loro solo che lavorarono al Politecnico di Zurigo nella prime metà del XX secolo.

¹⁴Richard von Mises (Leopoli 1883 - Boston 1953), matematico e filosofo. Vedi biografia in appendice.

¹⁵M. T. Huber, ingegnere polacco, prima metà del XX secolo.

¹⁶H. Hencky, prima metà del XX secolo.

¹⁷Charles-Augustin de Coulomb (Angoulême 1736 - Parigi 1806), fisico.

3.5 Formule di verifica e di progetto

Una formula di verifica se fornisce un valore di tensione in funzione dei carichi e della geometria; è di progetto se fornisce un valore dimensionale, in funzione dei carichi, delle caratteristiche del materiale e di altri valori dimensionali che si suppongono dati *a priori* o che comunque costituiscono vincoli al progetto.

In quanto segue si userà una definizione più larga, intendendo come formula di verifica quella che fornisce direttamente il coefficiente di sicurezza (prima colonna) e come formula di progetto quella che pone un vincolo alle tensioni principali in funzione della σ_{amm} (seconda colonna).

Nel seguito, σ_1, σ_2 e σ_3 sono le tre tensioni principali in ordine decrescente, σ_R è la tensione di rottura e s è il grado di sicurezza, σ_{amm} è la tensione ammissibile

1) Criterio della massima tensione

$$s = \frac{\sigma_R}{\sigma_1}; \quad \sigma_1 \leq \sigma_{amm}$$

2) Criterio della massima deformazione

$$s = \frac{\sigma_R}{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)}; \quad \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{amm}$$

3) Criterio della massima tensione tangenziale

$$s = \frac{\sigma_R}{\sigma_1 - \sigma_3}; \quad \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{amm}$$

4) Criterio di Hencky- von Mises

$$s = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}}; \quad \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \leq \sigma_{amm}$$

5) Criterio di Coulomb e criterio della curva intrinseca:

Il grado di sicurezza si ottiene per via grafica come il rapporto di omotetia che rende il massimo cerchio di Mohr tangente alla curva intrinseca.

3.6 Solido del De Saint Venant

Problema di de Saint Venant *Determinare lo stato di equilibrio di un solido cilindrico o prismatico sollecitato solo sulle due basi.* Tale solido è detto solido di de Saint Venant. De Saint Venant risolse questo problema con l'ausilio del seguente

Postulato di de Saint Venant In un solido di de Saint Venant le tensioni e le deformazioni non variano, se non in una zona adiacente alle due basi, se si sostituisce la sollecitazione agente su di esse con un'altra avente la stessa risultante e lo stesso momento risultante.

Più tardi i risultati vennero estesi a solidi caricati anche sulla superficie laterale, o con asse non rettilineo, o con sezione variabile con gradualità.

Riassumo qui alcune formule che si suppongono note dalla Scienza delle Costruzioni.

SPORZO NORMALE

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

FLESSIONE RETTA

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_{max} = \frac{M_x}{W_{fx}}$$

I_x è il momento quadratico di area, popolarmente detto *momento d'inerzia*, della sezione rispetto all'asse baricentrico x ed è definito

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

Il *modulo di resistenza a flessione* W_{fx} è definito $W_{fx} = I_x/y_{max}$.

Raggio di curvatura di una trave inflessa:

$$R = \frac{y}{\epsilon} = \frac{EI_x}{M}$$

Linea elastica:

$$y'' = \frac{M}{EI_x}$$

Proprietà delle sezioni più comuni:

Cerchio (rispetto ad un diametro):

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \quad W_{fx} = W_{fy} = \frac{\pi D^3}{32}$$

Corona circolare (rispetto ad un diametro):

$$I_x = I_y = \frac{\pi(D_e^4 - D_i^4)}{64} \quad W_{fx} = W_{fy} = \frac{\pi(D_e^4 - D_i^4)}{32D_e}$$

Corona circolare sottile di spessore s (rispetto ad un diametro):

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^3}{8} s \quad W_{fx} = W_{fy} = \frac{\pi D^2}{4} s$$

Rettangolo (rispetto ad un asse baricentrico x parallelo al lato b e perpendicolare al lato h):

$$I_x = \frac{b h^3}{12} \quad W_{fx} = \frac{b h^2}{6}$$

FLESSIONE DEVIATA E FLESSIONE COMPOSTA

Per i materiali con comportamento simmetrico a trazione e a compressione (ossia per tutti i metalli eccetto la ghisa) si applica il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

TAGLIO

$$\tau = \frac{T S}{b I}$$

dove S è il momento statico di una delle parti della sezione

casi particolari:

sezione rettangolare

$$\tau_{max} = \frac{3 T}{2 b h}$$

sezione circolare

Tabella 3.1: Coefficienti per il calcolo della torsione in travi rettangolari

b/c	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

$$\tau_{max} = \frac{4T}{3A}$$

TORSIONE

1) sezione circolare o a corona circolare

$$\tau_{max} = \frac{M_t D_e}{I_p 2}$$

$$\theta = \frac{M_t l}{G I_p}$$

I_p è il momento polare di area, popolarmente detto *momento d'inerzia polare* che vale

$$I_p = \frac{\pi (D_e^4 - D_i^4)}{32}$$

2) sezione rettangolare

La massima tensione tangenziale si ha nel punto medio dei lati più lunghi della sezione e vale

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha b c^2}$$

dove b è il lato più lungo e c è il lato più corto della sezione e α è data dalla tabella I.

L'angolo totale di torsione in radianti è

$$\theta = \frac{M_t L}{\beta b c^3 G}$$

dove L è la lunghezza del tratto soggetto al momento M_t e β è data dalla tabella 3.1.

CASI COMPOSTI

Si applica il principio di sovrapposizione degli effetti.

Le σ da sf. normale e da mom. flett. si sommano algebricamente, mentre le τ da taglio e torsione si sommano vettorialmente, visto che in generale hanno direzioni diverse. Dette σ e τ le quantità così ottenute e visto che il solido di de Saint Venant è in stato piano di tensione, si ha:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

3.7 Deformazioni laterali di travi inflesse

Si ottengono tramite doppia integrazione del diagramma del momento flettente; infatti l'equazione che connette il momento flettente alla curvatura è:

$$y'' = \frac{M}{EI}.$$

L'integrazione può avvenire per via analitica o numerica o per via grafica (col metodo del poligono funicolare); quest'ultima è ovviamente meno precisa, ma dà un'idea rapida dell'andamento della deformata e perciò può essere adottata o come primo tentativo, per una conoscenza preliminare della linea elastica o per la successiva applicazione del metodo di Mohr.

Quest'ultimo, detto anche metodo dell'area dei momenti, parte dalla constatazione che l'angolo tra le tangenti alla linea elastica nei punti A e B è dato dall'integrale

$$d\phi = \int_A^B \frac{M}{EI} dx.$$

Si dimostra che la distanza δ (misurata normalmente alla trave) tra la deformata in un punto P e la tangente alla deformata in un altro punto T è data dal momento statico dell'area del diagramma dei momenti tra il punto di tangenza T e il punto in studio P

$$\delta = \int_T^P \frac{M}{EI} x dx.$$

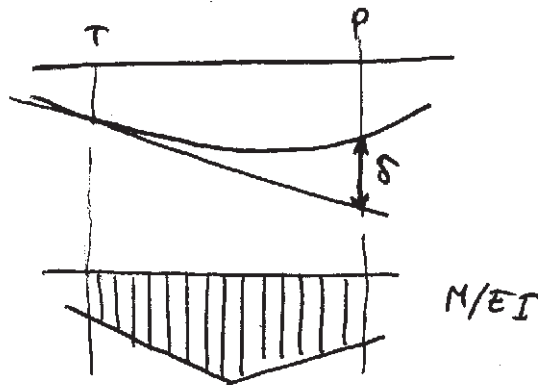


Figura 3.1: Deformazione laterale di travi inflesse