

2. Deformazione

2.1 Teoria della deformazione

SPOSTAMENTO

Dato un punto P che dopo la deformazione si sposta in P', si definisce spostamento il vettore P'-P. Se in ogni punto del corpo si applica il vettore spostamento si definisce una funzione vettoriale spostamento \mathbf{s} equivalente a tre funzioni scalari del punto u, v, w . Se queste si sviluppano in serie di Taylor nelle vicinanze di un punto O, assunto come origine, per l'ipotesi di piccolezza degli spostamenti ci si limita al termine lineare e si ottiene

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_O \\ v_O \\ w_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice è la somma di una parte antisimmetrica (che rappresenta una rotazione rigida) e in una parte simmetrica (deformazione pura).

Lo spostamento dovuto alla deformazione pura, le cui componenti sono indicate con apice, è:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice ϵ delle componenti speciali di deformazione appare come un operatore che trasforma i vettori posizione nei corrispondenti vettori spostamento.

Se si definisce ϵ_i l'allungamento nella direzione i e γ_{ij} la variazione dell'angolo tra le direzioni i e j , inizialmente ortogonali, si dimostra che è:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

Quindi la matrice ϵ si scrive

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

Si noti che, per $i \neq j$, risulta $\epsilon_{ij} = (1/2)\gamma_{ij}$.

DIREZIONI PRINCIPALI

Un punto P nell'intorno di O individua una direzione principale OP se dopo la deformazione pura si porta in P* tale da essere allineato con O e P.

Ciò significa che il vettore spostamento è parallelo al vettore posizione e quindi le direzioni principali sono gli autovettori dell'operatore ϵ .

2.2 Misura della deformazione

2.2.1 ESTENSIMETRI ELETTRICI

I più usati estensimetri elettrici sono quelli a resistenza nei quali la misura della deformazione è ricondotta alla misura di una variazione di resistenza. Sono costituiti da una griglia di materiale resistivo, generalmente una lega di nichel, fissata ad una base di materiale plastico che a sua volta viene incollata al pezzo con resina epossidica o cianoacrilato. Lo spessore complessivo di griglia, base e collante non supera i 50 μm . La deformazione del pezzo induce una deformazione della griglia, che a sua volta fa variare la resistenza elettrica letta tra i due terminali. La variazione di resistenza è dovuta in parte alla variazione di sezione e di lunghezza dei tratti della griglia in parte alla variazione di resistività del materiale di cui essa è fatta.

Infatti la resistenza di un conduttore di sezione A e lunghezza l è

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

in cui ρ è la resistività del materiale. La derivata logaritmica di questa espressione dà:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta A}{A}.$$

Dalla teoria dell'elasticità

$$\frac{\Delta l}{l} = \epsilon \quad \frac{\Delta A}{A} = 2\nu.$$

Il fenomeno della piezoresistività è la dipendenza della $\Delta\rho/\rho$ dalla deformazione; questa per piccoli valori di ϵ si assume lineare

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = k'\epsilon$$

con $k' \approx 0.5$ per molti materiali. Quindi

$$\frac{\Delta R}{R} = \epsilon(k' + 1 + 2\nu) \approx 2.1\epsilon$$

e in generale

$$\frac{\Delta R}{R} = k\epsilon$$

dove la deformazione ϵ è misurata parallelamente ai tratti della griglia. Il valore di k è di circa 2-2.1 per i tipi più diffusi di estensimetri. Il valore nominale di R è di 120 Ω e l'isolamento rispetto al substrato deve superare i 1000 $\text{M}\Omega$. La misura di ΔR viene fatto con un ponte di Wheatstone; con opportuna disposizione è possibile ottenere la compensazione per le variazioni di temperatura.

L'applicazione (incollaggio) degli estensimetri è preceduta da accuratissima pulizia della superficie e deve essere fatta da un operatore esperto; inoltre l'estensimetro non può essere riutilizzato perché non è possibile staccarlo senza rovinarlo. La precisione ottenibile è dell'ordine di poche unità per milione (pochi microepsilon ($\mu\epsilon$) come si dice in gergo).

2.2.2 FOTOELASTICITÀ

La luce, e in generale la radiazione elettromagnetica, è costituita da onde trasversali: i campi elettrico e magnetico sono diretti in senso perpendicolare alla direzione di propagazione. La velocità di propagazione è per i materiali monorifrangenti, data da c/n , essendo c la velocità della luce nel vuoto e n l'indice di rifrazione. Nei materiali birifrangenti la velocità dell'onda varia a seconda dell'orientazione dei campi elettrico e magnetico dell'onda rispetto a certi assi del materiale.

Alcuni materiali presentano il fenomeno della birifrangenza artificiale meccanica: essi, se investiti da un fascio di luce polarizzata, trasmettono con velocità diverse le due componenti parallele alle due direzioni principali di deformazione. In altri termini per essi gli assi di birifrangenza coincidono con quelli principali di deformazione (fenomeno della fotoelasticità), e quindi non sono fissati *a priori* ma dipendono dallo stato di sforzo.

In un materiale fotoelastico soggetto a deformazione, gli indici di rifrazione n_1 e n_2 nelle direzioni principali sono correlati con le deformazioni principali dalla seguente legge

$$n_1 - n_2 = K(\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

in cui K è una costante adimensionale detta costante fotoelastica (strain-optical coefficient) del materiale (tab 2.1).

Misure relative a questo fenomeno ottico permettono quindi di risalire allo stato di deformazione nel materiale. Sono possibili due applicazioni: o si costruisce un modello dell'organo sotto sforzo e si risale dalle deformazioni del modello a quelle della struttura¹ o si incolla sull'organo in studio uno strato di materiale fotoelastico, che si deformerà come gli strati superficiali di quello. Nel seguito parlerò esclusivamente della tecnica del modello, che fornisce risultati quantitativamente più accurati. Inoltre ci si riferirà a modelli piani, ritagliati in una lastra di spessore costante s , in quanto di più facile realizzazione e studio.

Si disponga una lamina di materiale fotoelastico tra due polarizzatori incrociati, cioè con gli assi ottici a 90° , detti *polarizzatore* e *analizzatore*; se essa è scarica non modifica la polarizzazione della luce, che non viene trasmessa; se invece viene caricata fa ruotare in generale l'angolo di polarizzazione, per cui la luce viene trasmessa.

Sia α l'angolo tra la direzione di polarizzazione della luce e uno degli assi principali di tensione, diciamo l'asse x . La vibrazione della luce può essere rappresentata dallo 'spostamento'²

$$s = a \cos \omega t$$

nella direzione OA , dove ω è 2π volte la frequenza, dipendente dal colore della luce (qui supposta monocromatica)³.

Le proiezioni di questa vibrazione sugli assi principali, all'ingresso della luce nel modello fotoelastico, sono

$$x_{im} = a \cos \alpha \cos \omega t$$

$$y_{im} = a \sin \alpha \cos \omega t.$$

L'effetto della lamina fotoelastica è di introdurre un certo ritardo temporale nella trasmissione della luce, visto che la velocità di propagazione è più piccola che nell'aria, ma questo ritardo dipende dalla direzione della vibrazione; infatti il raggio che vibra nella direzione x incontrerà un

¹famosi furono i modelli fotoelastici di cattedrali gotiche, realizzati negli anni sessanta del XX secolo

²Ciò che 'vibra' nel piano di polarizzazione OA è il vettore induzione magnetica \mathbf{B} . Ciò che 'vibra' nel piano di vibrazione, normale al piano di polarizzazione, è il campo elettrico \mathbf{E} .

³Si riportano le relazioni tra la pulsazione ω , la frequenza ν , la lunghezza d'onda λ e la velocità c :

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \nu = c/\lambda.$$

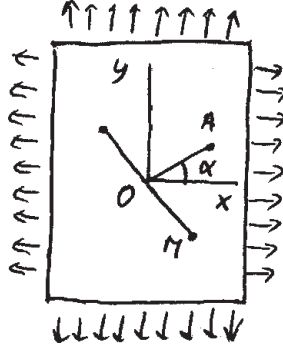


Figura 2.1: Fotoelasticità

indice di rifrazione n_1 e quindi si propagherà con velocità c/n_1 , mentre il raggio che vibra nella direzione y incontrerà un indice di rifrazione n_2 e quindi si propagherà con velocità c/n_2 .

Il tempo impiegato dalla luce per attraversare lo spessore s del provino, vibrando nella direzione x , è

$$t_1 = \frac{sn_1}{c}.$$

Se invece vibra nella direzione y impiegherà un tempo

$$t_2 = \frac{sn_2}{c}.$$

All'uscita del modello si avrà

$$x_{um} = a \cos \alpha \cos \omega(t - t_1)$$

$$y_{um} = a \sin \alpha \cos \omega(t - t_2).$$

Si è cioè introdotto un *ritardo di fase* $\Delta = \omega(t_2 - t_1)$, per cui si può scrivere, con opportuna posizione, per la luce che arriva all'analizzatore,

$$x_{um} = a \cos \alpha \cos \psi$$

$$y_{um} = a \sin \alpha \cos(\psi - \Delta).$$

Il piano di polarizzazione dell'analizzatore, che è a 90° con quello del polarizzatore, è rappresentato in figura dal piano OM ; le componenti lungo esso sono

$$x_{um} \sin \alpha = \frac{1}{2} a \sin 2\alpha \cos \psi$$

$$-y_{um} \cos \alpha = -\frac{1}{2} a \sin 2\alpha \cos(\psi - \Delta).$$

La vibrazione che attraversa l'analizzatore è quindi

$$\frac{1}{2} a \sin 2\alpha [\cos \psi - \cos(\psi - \Delta)] = -a \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta}{2} \sin \left(\psi - \frac{\Delta}{2} \right)$$

la cui ampiezza è

$$a \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta}{2};$$

essa è diversa da zero a meno che $\sin 2\alpha = 0$ o $\sin(\Delta/2) = 0$. Si hanno così due famiglie di fasce scure, rispettivamente le *isocline* e le *isocromatiche*.

Le prime sono il luogo dei punti in cui le direzioni principali di deformazione sono contenute nei piani di simmetria del polarizzatore e dell'analizzatore; le seconde sono il luogo dei punti in cui è

$$\Delta = 2N\pi$$

essendo N un intero relativo, detto *ordine di frangia*. Risalendo alla definizione del ritardo di fase Δ si ha:

$$\Delta = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2\pi s}{\lambda}(n_2 - n_1) = \frac{2\pi sK}{\lambda}(\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

e quindi

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 = \frac{N\lambda}{sK}$$

in cui λ è la lunghezza d'onda della luce, N è l'ordine di frangia, s è lo spessore del modello e K è la costante fotoelastica (strain-optical coefficient) del materiale (tab. 2.1).

Tabella 2.1: Costante fotoelastica K per vari materiali

Materiale	K
Vetro	0.14
Resina epossidica	0.07 ÷ 0.13
Resina epossidica plasticizzata	0.02 ÷ 0.03
Poliestere allilico	0.06
Policarbonato	0.15
Poliuretano	0.003

Per i materiali isotropi le direzioni principali delle deformazioni e delle tensioni coincidono e per i materiali elastici tra tensioni e deformazioni c'è proporzionalità; perciò per materiali isotropi elastici le isocromatiche sono anche il luogo dei punti in cui è costante la differenza tra le tensioni principali. Di fatto il *valore di una frangia* F è espresso in termini di tensione, cioè è la quantità di cui varia la differenza tra tensioni principali quando si passa da una frangia alla successiva.

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{NF}{s}$$

essendo $F = E\lambda/K$, per cui in F rientrano non solo le caratteristiche del materiale ma anche la lunghezza d'onda della luce. è chiaro che ci interessa che F sia il minimo possibile per poter rilevare le minime differenza di tensione.

Come si vede nella fig. 2.2 ruotando gli assi principali del polariscopio le isocline ruotano, mentre le isostatiche rimangono fisse.

Le isocromatiche possono essere osservate da sole facendo ruotare rapidamente polarizzatore e analizzatore purchè si mantengano sempre incrociati: le isocline ruotano anch'esse per cui si rendono invisibili. Lo stesso risultato è conseguito con mezzi puramente ottici impiegando due polarizzatori circolari, che fanno ruotare rapidamente il piano di polarizzazione della luce.

Le direzioni principali di deformazione (e di tensione) possono essere individuate ruotando in diverse posizioni polarizzatore e analizzatore, sempre con gli assi rigorosamente incrociati, determinando così i luoghi dei punti in cui le deformazioni principali sono inclinati dello stesso angolo

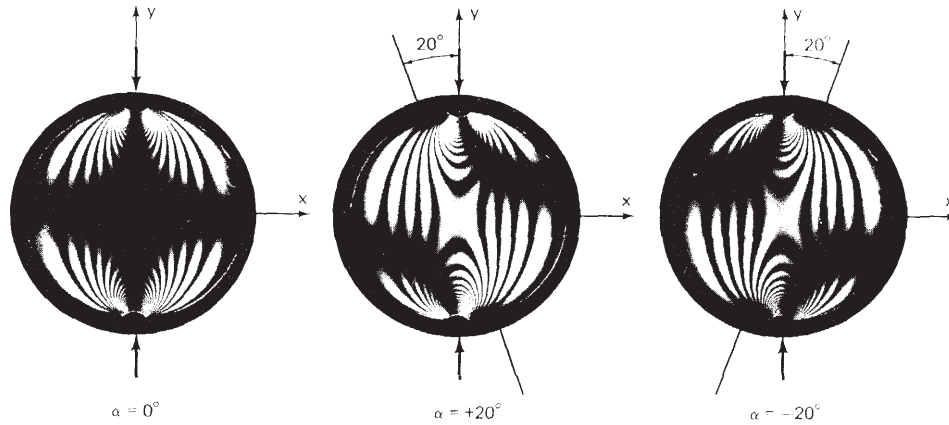


Figura 2.2: Frange isocromatiche e isocline in un disco caricato agli estremi osservato al polariscopio in luce monocromatica.

rispetto agli assi di riferimento. E' possibile quindi, con un numero sufficiente di rilievi, tracciare l'andamento delle isostatiche.

La numerazione dell'ordine delle isocromatiche è facile osservando che, in luce monocromatica, essa segue l'ordine di apparizione delle frange all'aumentare del carico, mentre, in luce bianca, l'ordine zero è nero, mentre gli altri sono colorati in maniera caratteristica.

Una volta nota la differenza delle deformazioni o delle tensioni principali basterà determinarne la somma per poter calcolare, per addizione e sottrazione, separatamente ciascun valore di esse.

Per questa determinazione sono possibili vari metodi sia sperimentali che teorici. Uno dei più antichi, ma anche dei meno precisi, è quello dovuto a Mesnager, che consiste nel misurare in vari punti del modello la variazione dello spessore conseguente all'applicazione dei carichi; essa è infatti legata, per il fenomeno della contrazione laterale, alla somma delle tensioni principali. Le linee di uguale variazione di spessore sono dette *isopachiche* e si possono determinare direttamente con metodi interferometrici.

Altri metodi suggeriscono l'integrazione grafica delle equazioni di Lamé-Maxwell o l'impiego di analogie reoelettriche.

Si noti che lungo il contorno, dove di solito sono i punti più sollecitati, una delle tensioni principali è nulla, per cui la differenza coincide in modulo con il valore dell'unica tensione principale diversa da zero.