13. Recipienti a parete spessa

13.1 Equazioni di Lamé

Si pone che lo stato tensionale sia funzione solo di r e inoltre che

- $d\sigma_z/dr = 0$
- $d\epsilon_z/dr = 0 \qquad (1)$

Le equazioni che occorrono sono:

- Equazione di equilibrio
- Equazione di congruenza. Saranno richiamete in seguito, ma di esse non si farà uso in quanto saranno sostituite dalla (1) scritta sopra.
- Legame tensione-deformazione (legge di Hooke, tradotta formalmente dalle equazioni di Navier)

13.1.1 Equazione di equilibrio

Si consideri un elementino come in fig. 13.1 e di altezza unitaria lungo z. Si dimostra che le direzioni r, θ e z sono direzioni principali, per cui sulle facce dell'elementino non vi sono tensioni tangenziali. Se ne faccia l'equilibrio alla traslazione lungo r (tutte le altre equazioni di equilibrio si riducono ad identità). Tale equazione si scrive:

$$-\sigma_r r \mathrm{d}\theta + \left(\sigma_r + \frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r\right)(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta - 2\sigma_t \mathrm{d}r \sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = 0$$

Innanzitutto si può identificare il seno col suo argomento; ciò comporta la comparsa di un $\mathrm{d}\theta$ a fattor comune, che quindi si semplifica. Sviluppando il prodotto delle due parentesi si ottiene un termine finito $\sigma_r r$che si semplifica col preesistente $-\sigma_r r$ e un termine in $\mathrm{d}r^2$ che si trascura in quanto infinitesimo di ordine superiore. Raccogliendo i termini in $\mathrm{d}r$, eliminando il fattor comune $\mathrm{d}r$ e raccogliendo si ha:[1]

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{r}$$

13.1.2 Equazioni di congruenza

Vedi fig. 13.2

Si considera diversa da zero una sola componente dello spostamento, ossia la u (le altre sono nulle per ragioni di simmetria). Risulta:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}$$
$$\epsilon_t = \frac{u}{r}$$

[1] Raccomando allo studioso lettore di fare effettivamente i passaggi e non accontentarsi di questa sintetica descrizione

13.1.3 Equazioni di Navier (legame tensione-deformazione)

Si noti che rimangono formalmente identiche a quelle in coordinate cartesiane.

$$E\epsilon_t = \sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)$$

$$E\epsilon_r = \sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)$$

$$E\epsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_t + \sigma_r)$$

Queste relazioni, che esprimono in sostanza la legge di Hooke, sono, secondo Franciosi, dovute al Navier (1821).

13.1.4 Equazione differenziale della tensione

Derivando rispetto ad r l'ultima equazione di Navier si ha

$$\frac{d}{dr}(\sigma_t + \sigma_r) = 0$$

da cui

$$\sigma_t + \sigma_r = 2C_1 \tag{1}$$

Dalla equazione dell'equilibrio si ricava subito

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_t - \sigma_r. \tag{2}$$

Eliminando σ_t dalle (1) e (2) si ha

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\sigma_r = 2C_1.$$

Il primo membro di questa espressione è

$$\frac{1}{r}\frac{d(\sigma_r r^2)}{dr}$$

cosicché separando le variabili

$$d(\sigma_r r^2) = 2C_1 r dr$$

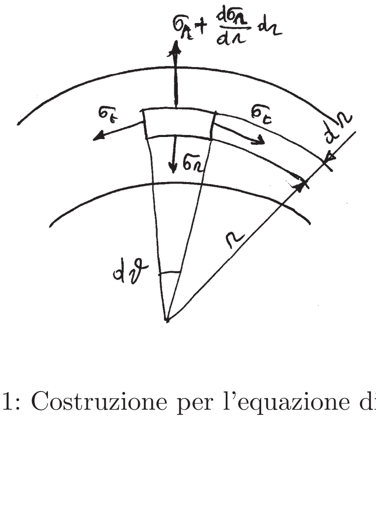
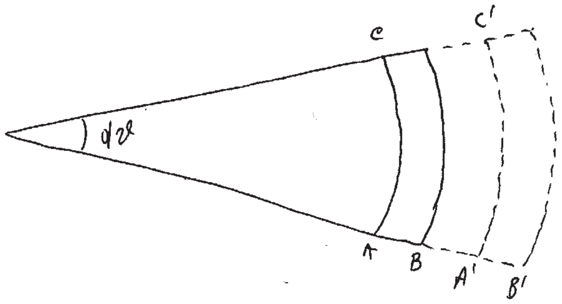


Figura 13.1: Costruzione per l'equazione di equilibrio.



$$\varepsilon_r = \frac{(B'-A')-(B-A)}{B-A} =$$

$$= \frac{(B'-B)-(A'-A)}{B-A} = \frac{u+du-u}{dr} = \frac{du}{dr}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\widehat{A'C'} - \widehat{AC}}{\widehat{AC}} = \frac{(r+u)d\vartheta - r\,d\vartheta}{r\,d\vartheta} = \frac{u}{r}$$

Figura 13.2: Equazioni di congruenza per recipienti cilindrici di grosso spessore

e integrando

$$\sigma_r r^2 = C_1 r^2 - C_2,$$

e ancora

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2}$$

Le due costanti C_1 e C_2 si ottengono imponendo le condizioni al contorno

$$\sigma_r = -p_i \text{ per } \; r = r_i$$

$$\sigma_r = -p_e \text{ per } \; r = r_e$$

In definitiva si ha

$$C_1 = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}$$

$$C_2 = (p_i - p_e)\frac{r_i^2\, r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}.$$

Le espressioni di σ_t e σ_r sono dette equazioni di Lamé, che si scrivono per esteso:

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} + (p_i - p_e)\frac{r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}\frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} - (p_i - p_e)\frac{r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}\frac{1}{r^2}$$

Per quanto riguarda σ_z la procedura precedente non ci illumina; ragionando in termini di equilibrio globale si ottengono i due valori

$$\sigma_z = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}$$

valida per fondi di pezzo o flangiati sul mantello e

$$\sigma_z = 0$$

per fondi con tiranti. In quest'ultimo caso però, poiché i tiranti sono pre-tesi mentre la spinta sui fondi dipende dalla pressione, la tensione del mantello può anche essere negativa. Anzi, un piccolo valore negativo della tensione è necessario per il corretto funzionamento delle guarnizioni.

Un esempio dell'andamento delle tensioni è dato nella fig. 13.3

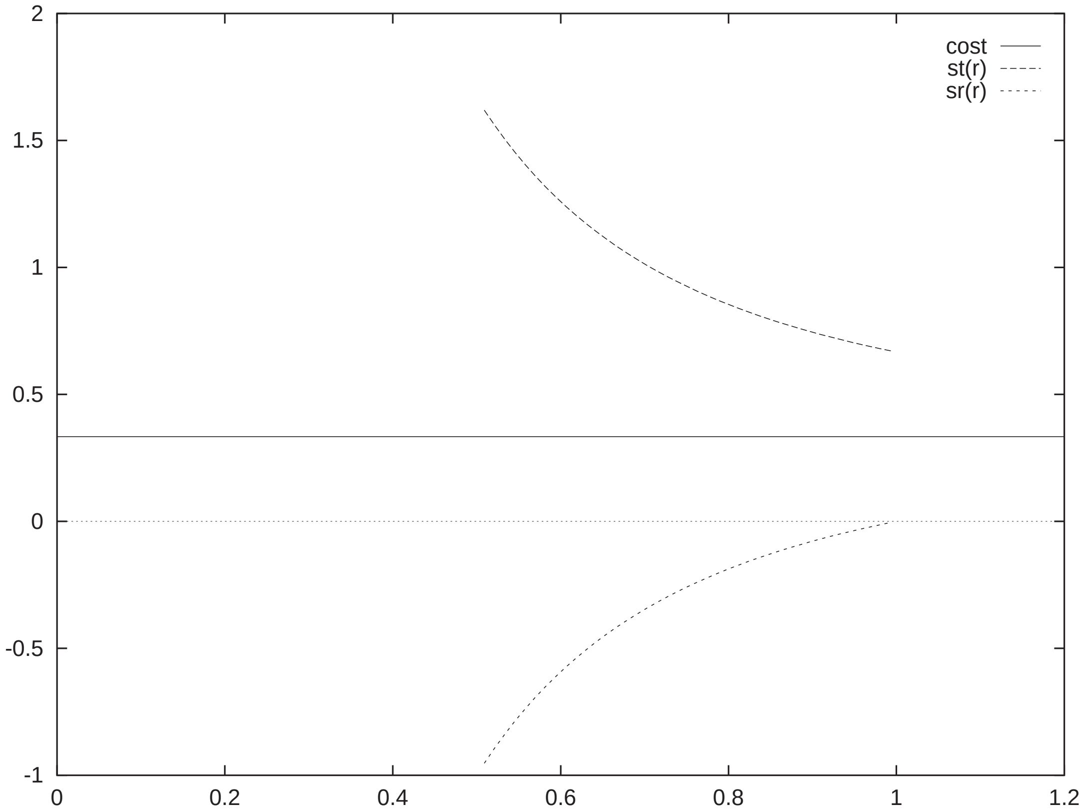


Figura 13.3: Diagramma delle tensioni in un recipiente di grosso spessore. In ascisse c'è r/r_e, in ordinata σ/p_i; la pressione esterna è nulla e $r_i/r_e = 0.5$.

13.2 Formule di progetto e di verifica

Si studia il caso più comune $p_e = 0$; in questo caso la pressione interna p_i sarà indicata con p. Le tensioni nel punto più sollecitato, cioè a $r = r_i$ valgono

$$\sigma_t = p\frac{r_i^2 + r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}$$

$$\sigma_r = -p$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{per fondi con tiranti} \\ p\frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} & \text{per fondi di pezzo} \end{cases}$$

La più grande delle tensioni è quella tangenziale, seguita da quella assiale e la più piccola è quella radiale (l'unica negativa). Si ottengono varie formule di progetto e di verifica applicando vari criteri di resistenza. Nelle formule precedenti si porrà $k = r_e/r_i$.

1) **Criterio della massima tensione**

$$\sigma_t \leq \sigma_{amm}$$

si scrive

$$p\frac{1+k^2}{k^2-1} \leq \sigma_{amm}$$

che diventa

$$(\sigma_{amm} - p)k^2 - (\sigma_{amm} + p) \geq 0.$$

Siccome k può essere solo positivo la disequazione avrà soluzione solo se

$$\sigma_{amm} - p > 0.$$

L'unico zero positivo del primo membro è la radice del rapporto cambiato di segno tra terzo e primo coefficiente; poiché il primo coefficiente è positivo la disequazione è soddisfatta solo per valori di k maggiori del suddetto zero. Per questo la soluzione è

$$k \geq \sqrt{\frac{\sigma_{amm} + p}{\sigma_{amm} - p}}.$$

2) **criterio della massima deformazione**

$$\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_a) \leq \sigma_{amm}.$$

A vantaggio di sicurezza si sceglie σ_a nullo. Perciò il criterio si scrive

$$p\frac{1+k^2}{k^2-1} + \nu p \leq \sigma_{amm}$$

che diventa

$$p(1 + k^2 - \nu + \nu k^2 \leq \sigma_{amm}(k^2 - 1)$$

$$k^2(\sigma_{amm} - (1+\nu)p) - \sigma_{amm} - (1-\nu)p \geq 0.$$

Svolgendo considerazioni analoghe a quelle fatte sopra si trova che la soluzione esiste solo se

$$\sigma_{amm} > (1+\nu)p$$

e vale

$$k \geq \sqrt{\frac{\sigma_{amm} + (1-\nu)p}{\sigma_{amm} - (1+\nu)p}}.$$

3) **criterio della massima tensione tangenziale**[2]

$$\sigma_t - \sigma_r \leq \sigma_{amm}.$$

[2]Questo criterio unisce la massima semplicità con un discreto accordo con i dati sperimentali.

diventa

$$k^2(\sigma_{amm} - 2p) - \sigma_{amm} \geq 0$$

Svolgendo considerazioni analoghe a quelle fatte sopra si trova che la soluzione esiste solo se

$$(\sigma_{amm} > 2p)$$

e vale

$$k \geq \sqrt{\frac{\sigma_{amm}}{\sigma_{amm} - 2p}}.$$

4) **criterio di Hencky-von Mises**[3]

$$\sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_z^2 + \sigma_r^2 - \sigma_t\sigma_z - \sigma_z\sigma_r - \sigma_t\sigma_r} \leq \sigma_{amm}$$

A vantaggio di sicurezza si tratta il caso dei fondi di pezzo ($\sigma_z = p/(k^2 - 1)$). Dopo calcoli un po' noiosi[4], si ha

$$p\frac{\sqrt{3}k^2}{k^2 - 1} \leq \sigma_{amm}$$

$$k^2(\sigma_{amm} - \sqrt{3}p) - \sigma_{amm} \geq 0$$

La soluzione esiste solo se

$$\sigma_{amm} > \sqrt{3}p$$

e vale

$$k \geq \sqrt{\frac{\sigma_{amm}}{\sigma_{amm} - \sqrt{3}p}}.$$

[3] è il criterio in maggior accordo con l'esperimento, per materiali duttili.

[4] svolti per voi dalla collega Paola Ammendola:

Elevando al quadrato ambo i membri e sostituendo le espressioni delle tre tensioni la disequazione diventa:

$$p^2\frac{(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2} + p^2 + p^2\frac{1}{(k^2-1)^2} + p^2\frac{k^2+1}{k^2-1} - p^2\frac{k^2+1}{(k^2-1)^2} + p^2\frac{1}{k^2-1} \leq \sigma_{amm}^2$$

Mettendo in evidenza al primo membro $p^2/(k^2-1)^2$:

$$\frac{p^2}{(k^2-1)^2}\left[(k^2+1)^2 + (k^2-1)^2 + 1 + (k^2+1)(k^2-1) - (k^2+1) + (k^2-1)\right] \leq \sigma_{amm}^2$$

13.3 Appendice al capitolo

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLO SPOSTAMENTO E SUA INTEGRAZIONE

Si ricorda che le equazioni inverse di Navier sono:

$$\sigma_t = 2G\big(\epsilon_t + \frac{\nu}{1-2\nu}e\big)$$

eccetera, essendo

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$
$$e = \epsilon_t + \epsilon_r + \epsilon_z$$

Derivando la prima eq. inv. di Navier

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 2G\big(\frac{d\epsilon_r}{dr} + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{de}{dr}\big)$$

Sottraendo la prima eq. inv. di Navier dalla seconda e dividendo per r,

$$\frac{\sigma_t - \sigma_r}{r} = 2G\big(\frac{\epsilon_t - \epsilon_r}{r}\big)$$

Nelle due ultime espressioni i primi membri sono uguali per l'equazione di equilibrio; sono dunque uguali anche i secondi membri, cioè

$$\frac{d\epsilon_r}{dr} + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{de}{dr} = \frac{\epsilon_t - \epsilon_r}{r} \tag{1}$$

Derivando ora le espressioni di ϵ_t ed ϵ_r prese dalle eq. di congruenza e ricordando che ϵ_z è uniforme su tutta la sezione ossia non varia con r, si ha:

$$\frac{de}{dr} = \frac{d\epsilon_r}{dr} + \frac{d\epsilon_t}{dr} + \frac{d\epsilon_z}{dr} = \frac{d\epsilon_r}{dr} - \frac{\epsilon_t - \epsilon_r}{r} + 0$$

confrontando con la (1) si ha

$$\frac{de}{dr} = 0 \tag{2}$$

che è l'espressione cercata. Sapendo che

$$\frac{d\epsilon_z}{dr} = 0$$

si ricava dalla (2)

$$\frac{d(\epsilon_t + \epsilon_r)}{dr} = 0 \tag{3}$$

che si trova più spesso scritta in termini di spostamento

$$\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{d^2u}{dr^2} = 0$$

Per l'integrazione poniamo

$$u = r^\alpha$$

da cui

$$\frac{du}{dr} = \alpha r^{\alpha-1}$$
$$\frac{d^2u}{dr^2} = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$$

quindi

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + \frac{1}{r}\alpha r^{\alpha-1} - \frac{1}{r^2}r^\alpha = 0$$

che, dividendo per $r^{\alpha-2}$ dà luogo ad un'equazione algebrica in α la cui soluzione è $\alpha = \pm 1$.

La soluzione generale è quindi

$$u = Ar - \frac{B}{r}.$$

Più facilmente, tornando alla (3) si integri una prima volta

$$\epsilon_t + \epsilon_r = 2A$$

e si passi allo spostamento

$$\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} = 2A$$

ossia

$$\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr} = 2A$$

quindi

$$\frac{d(ur)}{dr} = 2Ar$$

e integrando ancora

$$ur = Ar^2 - B$$

ossia

$$u = Ar - \frac{B}{r}.$$

Sostituendo nelle eq. di congruenza si ha

$$\epsilon_t = A + \frac{B}{r^2}$$

$$\epsilon_r = A - \frac{B}{r^2}$$

e poi

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2}$$
$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

e quindi le equazioni di Lamè.